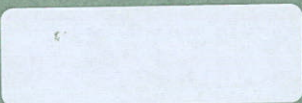


R 1865 / Q 282



waterloopkundig laboratorium
delft hydraulics laboratory

trillingen in de stromingsrichting van
rioolschuiven bij variërende spleetgrootte



verslag bureaustudie

R 1865/Q 282

september 1986

C45
tow

toegepast onderzoek
waterstaat

trillingen in de stromingsrichting van
rioolschuiven bij variërende spleetgrootte

verslag bureaustudie

R 1865/Q 282

september 1986



INHOUD

	blz.
1. <u>Inleiding</u>	1
1.1 Opdracht.....	1
1.2 Verantwoording.....	1
1.3 Relatie overig onderzoek.....	3
1.4 Probleemstelling.....	5
1.5 Globale opzet van het onderzoek.....	5
1.6 Korte samenvatting en voornaamste konklusies.....	6
2. <u>Diverse Theorieën</u>	11
2.1 <u>Oorspronkelijke WL-aanpak (WL-I)</u>	11
2.1.0 Algemeen.....	11
2.1.1 Aannames.....	11
2.1.2 Aanpak.....	14
2.1.3 Stabiliteit ongedempte schuif.....	15
2.1.4 Stabiliteit gedempte schuif.....	17
2.2 <u>Uitbreiding WL-aanpak naar toepassing met wandwrijving (WL-Ib)</u> ..	19
2.2.0 Algemeen.....	19
2.2.1 Aanpak.....	19
2.2.2 Stabiliteit van een ongedempte schuif.....	22
2.3 <u>Uitbreiding WL-aanpak naar kompressiebel medium (WL-II)</u>	25
2.3.0 Algemeen.....	25
2.3.1 Aanpak.....	25
2.3.2 Stabiliteit ongedempte schuif.....	29
2.4 <u>Uitbreiding WL-aanpak naar kompressiebel medium en wandwrijving (WL-III)</u>	32
2.4.0 Algemeen.....	32
2.4.1 Aanpak.....	32
2.5 <u>Procedure Thomann</u>	38
2.5.2 Stabiliteitskriteria.....	41
2.5.3 Experimenten van Thomann.....	43
2.6 <u>Procedure Weaver</u>	46
2.6.1 Principe.....	46
2.6.2 Stabiliteitskriterium.....	50

INHOUD (vervolg)

3.	<u>Globale vergelijkingen van de diverse methodieken</u>	52
3.1	Uitgangspunten en beperkingen.....	52
3.2	Geschiktheid van diverse methodieken.....	54
4.	<u>Experimentele gegevens</u>	56
4.0	Algemeen.....	56
4.1	Kontroleberekeningen voor Thomanns resultaten.....	56
4.2	Kontrole berekeningen met gegevens van Weaver.....	59
5.	<u>Konklusies en aanbevelingen</u>	62

LITERATUUR

TABELLEN

FIGUREN

APPENDICES

TABELLEN

- 1 Experimentele gegevens Thomann
- 2 Idem, afgeleid uit grafieken van Thomann
- 3 Vergelijking ω_{kr} (Thomann) met ω_{kr} (WL-II)

FIGUREN

- 1 Stabiliteitsdiagram WL-II
- 2 Experimenten Thomann weergegeven in WL-II stabiliteitsdiagram

APPENDICES

- 1 Basisvergelijkingen voor stroming in leiding zonder wrijving
- 2 Harmonische oplossing 1-dimensionale stroming met wrijvingsterm
- 3 Berekening spleetoppervlak A_{gap}

TRILLINGEN IN DE STROMINGSRICHTING VAN RIOOLSCHUIVEN BIJ VARIËRENDE
SPLEETHOOGTE

1. Inleiding

1.1 Opdracht

In het kader van Toegepast Onderzoek voor de Waterstaat (TOW) is door Rijkswaterstaat, directie Sluizen en Stuwen aan het Waterloopkundig Laboratorium opgedragen diverse zelfexciterende trillingswijzen van schuiven nader te onderzoeken. Deze trillingen verschillen onderling door de richting van de trilling ten opzichte van stromingsrichting en het vlak van spleetopening. Het onderhavige rapport behelst trillingen in de hoofdstroomrichting waarbij de spleetgrootte varieert (de zogenaamde badstoptrilling).

Het onderzoek vond plaats in de periode augustus 1983 - eind 1985 en is uitgevoerd door Dr. P.A. Kolkman, G.J.H. Lindijer en J. Uwland. Laatstgenoemde heeft het verslag samengesteld.

1.2 Verantwoording

Bij het ontwerp van een schuif (al dan niet in een gesloten leiding) spelen naast de statische belasting (waterdruk), de dynamische belastingen een belangrijke rol.

Dynamische belastingen worden onder andere veroorzaakt bij het "trillen" van de schuif. Het trillingsgebeuren is door de zeer vele componenten die een bijdrage kunnen leveren zeer complex.

Voor het trillingsgedrag zijn onder andere van belang: konstruktieve en geometrische eigenschappen van de schuif, het ophangstelsel en afdichtingen (b.v. vorm, stijfheid, massa), de schuifopening, het verval over de schuif, de schuif-hefsnelheid, de vorm en afmetingen van de leiding, de turbulentie van de stroming onder de schuif, het optreden van cavitatie.

In navolging van Kolkman [1] worden veelal 3 typen trillingen onderscheiden:

- 1) Gedwongen trillingen. Hierbij reageert de konstruktie passief op een onafhankelijk uitwendige excitatie.
- 2) Zelfsturende trillingen. Hierbij richt de excitatiekracht van het water zich naar de eigenfrekwentie van de konstruktie, de amplitude neemt hierbij toe tot een bepaald maximum.

3) Zelfexciterende trillingen. Hierbij ontstaat het excitatie mechanisme door de trilling zelf. Tenzij niet-lineaire effecten dit beperken, zal de amplitude exponentiëel toenemen.

Deze laatste trillingsvorm is zeer gevaarlijk en zal tot bezwijken van de constructie kunnen leiden.

Een kleine initiële beweging van een dergelijk systeem resulteert reeds in genoemde exponentiële groei van de amplitude.

Bij een schuifontwerp zal men trachten de zelfexciterende trillingen geheel te vermijden en zelfsturende trillingen hoogstens in geringe mate toestaan.

Maatregelen hiertoe zijn dat eigenfrequenties van de gehele schuif (of onderdelen ervan) voldoende hoog boven de frequentie van de trillingsbron liggen, waardoor resonantie en zelfsturende trillingen kunnen worden vermeden.

Zijn zelfexciterende trillingen niet te vermijden, dan dient men zorg te dragen voor de juiste (mechanische) demping en stijfheid.

Is het trillingsgebeuren lineair (bijv. bij kleine harmonische variaties op oorspronkelijke stroming) dan dient men zorg te dragen voor voldoende stijfheid en/of demping [1].

Er zijn evenwel ook (zelfexciterende) trillingen beschreven en gemeten [2] waar de vergroting van de stijfheid en demping juist een averechts effect sorteerden (met andere woorden: de trillingsamplituden vergrootten!).

Dit laatste geval betrof een trilling met grote amplitude, een duidelijk niet-lineair systeem.

De zelfexciterende trillingen zijn het onderwerp van een uitgebreide studie, die in het kader van Toegepast Onderzoek Waterstaat door RWS aan het WL is opgedragen. De trillingswijzen zijn daarbij onderscheiden naar trillingsrichtingen opzichte van stromingsrichting en schuif- c.q. spleetopening, zoals in par. 1.3 wordt aangegeven.

Het onderhavige rapport beperkt zich tot trillingen in de hoofdstromingsrichting waarbij de spleetgrootte variëert (badstoptrilling).

Voor een dergelijke trillingsvorm (die zeer frequent voorkomt) zijn helaas bij het WL weinig experimentele en prototypemetingen beschikbaar. Daarom is gepoogd van, in de literatuur gegeven, experimentele waarden gebruik te maken. Van belang is de overweging dat deze trilling zich niet alleen voordoet bij,

als duidelijk "badstopachtig" herkenbare, afsluiters zoals: cilinderschuiven, zuigers, afsluiters aan het begin of eind van leidingen (of leidinggedeelten). Maar ook bij andere schuiven kan door (onjuiste) afdichtingsvormen een dergelijke trilling ontstaan, bijvoorbeeld bij radiaalschuiven en terugslagkleppen (figuur 1.1).



Figuur 1.1







1.3 Relatie overig onderzoek

Bij de indeling van de trillingen is gekeken naar

- a) de trillingsrichting ten opzichte van de richting van de hoofdstroom
- b) de trillingsrichting ten opzichte van het vlak van de spleet- of schuifopening.

Drie combinaties (zie schema op blz. 4) zijn inmiddels nader onderzocht.

trillingschema

onderzoek	trillingsrichting		schema	opmerking
	hoofdstromings- richting	schuif-/spleet- openingen		
Ia M 1322 *)	⊥	//		 *)
Ib M 1490 M 1497/98*)	⊥	//		
II M 1906	//	⊥		—
III R 1865 badstop	//	//		—

- *) verschillende onderrandvormen
 ⊥ loodrecht op vlak
 // evenwijdig aan (of in) het vlak

Uitgaande van de theorie betreffende zelfexciterende trillingen opgesteld door Kolkman [1], is type Ia onderzocht in M 1322 [3]. In dit onderzoek is de trilling van de schuif in een richting loodrecht op hoofdstromingsrichting en in het vlak van de spleet onderzocht, voor een L-vormige en ellipsvormige (open) onderrand.

In M 1490 [4] zijn, nadat de theorie enigszins is aangepast, nog een aantal andere (ook dichte) onderrandvormen op trillingsgedrag onderzocht (Ib).

In M 1497/1498 zijn een aantal coëfficiënten, die gebruikt zijn in M 1490, bepaald [5].

In M 1906 [6] is het onderwerp een trilling in een richting evenwijdig aan de hoofdstroom en loodrecht op het vlak door de opening (II). Ook is gepoogd trillingen van type I en II onder een gemeenschappelijke noemer te brengen.

In het onderhavige onderzoek R 1865 is onderzocht een trilling in de richting van de hoofdstroom en het vlak door de spleet (III): De zogenaamde badstop-trilling.

Experimentele waarden zijn hierbij ontleend aan de literatuur [7], [8].

1.4 Probleemstelling

Het doel van dit onderzoek is het controleren en zo mogelijk uitbreiden van de (oorspronkelijke door Kolkman opgezette) theorie voor de zogenaamde badstoptrillingen, aan de hand experimentele gegevens.

Deze theorie, zoals beschreven in [1], [9] bevat een aantal beperkingen (zoals de aanname van: 1) geen wrijving en 2) een niet-kompressiebele vloeistof), die zo mogelijk moeten worden opgeheven.

1.5 Globale opzet van het onderzoek

In de literatuur is gezocht naar relevante experimentele gegevens.

Een tweetal onderzoekers publiceerden resultaten die in dit kader zeer bruikbaar bleken.

De onderzoekingen van Thomann [6] betroffen metingen aan een ventiel in een luchtleiding (kompressiebel dus). De onderzoekingen van Weaver (e.a.) [7] behelsden een "badstop"-afsluiter en een terugslagklep bij leidingen met water, rekening houdend met wrijving.

De oorspronkelijke aanpak van het WL was, dat werd verondersteld dat het systeem een zodanige "imaginaire" demping bezat, dat er een zuiver harmonische trilling zou worden uitgevoerd. Deze "imaginaire" demping c_i werd dan berekend, waarna werd bekeken of deze demping c_i groter of kleiner was dan de werkelijk aanwezige c_a .

De stabiliteit van het systeem was verzekerd indien $c_a > c_i$. Zie [1], [9] en par. 2.1.

Voor een ongedempt systeem geldt voor de kritieke situatie bij de "badstoptrilling" $c_k = 1 + c_m$, waarbij c_k de verhouding is tussen de veerstijfheid van de schuifkonstruktie en die veroorzaakt door het water en c_m de verhouding tussen schuifmassa en de massa van de vloeistof in de leiding.

De inspanningen van Thomann resulteerden uiteindelijk ook in een stabiliteitsdiagram waarin stabiele van instabiele systemen kunnen worden onderscheiden.

Na een aantal vereenvoudigende aannames is het hem mogelijk waarden voor de frekwentie en de opslingering c.q. demping te bepalen.

De aanpak van Thomann wordt in par. 2.5 globaal weergegeven.

Weaver e.a. [7] hebben zich niet beperkt tot relatief kleine bewegingen. Dit heeft geresulteerd in een stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, waarin ook de wrijving is verdiskonteerd.

Met een analytisch bepaalde stabiliteitsindicatie (vergelijkbaar het de " $c_k = 1 + c_m$ " van Kolkman) kan ook Weaver aangeven waar de overgang van stabiel naar instabiel gedrag plaats vindt.

De uitwerkingen van Weaver worden in par. 2.6 beschreven.

Teneinde de gevonden experimentele gegevens te kunnen narekenen is de WL-aanpak achtereenvolgens uitgebreid tot een mogelijkheid met kompressiebele vloeistof (gas) en daarna met wrijving. Deze uitbreidingen zijn beschreven in par. 2.2, 2.3 en 2.4.

N.B.: De theoretische benadering van het WL en Thomann zijn identiek, beide gaan uit van dezelfde basisvergelijkingen en komen dan ook voor de situatie met kompressiebele vloeistof zonder wandwrijving uit op dezelfde differentiaalvergelijkingen.

Daarna zijn de experimentele gegevens van Thomann en Weaver nagerekend.

1.6 Korte samenvatting en voornaamste konklusies

Per methodiek worden de voornaamste beperkingen en vooronderstellingen aangegeven en een globale beschrijving van de opzet gegeven (zie ook overzicht van hoofdstuk 3).

N.B.: Per methodiek worden vergelijkingen opnieuw genummerd.

WL-methodiek

De beschreven situatie is in figuur 2.1 geschetst.

De schuifbeweging wordt opgevat als een geringe harmonische verplaatsing ten opzichte van de oorspronkelijk (veel grotere) spleet: $y = \hat{y} e^{i\omega t}$.

De afvoercoëfficiënt door de spleet is konstant. Aanvankelijk is het medium niet kompressiebel en er is geen wandwrijving. Het stelsel vergelijkingen waarmee dit systeem wordt beschreven, bestaat uit:

a) Voor "extra" debiet:

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{(2g\Delta H_0)} + \frac{1}{2}\mu \delta_0' L_c \Delta H' \sqrt{(2g/\Delta H_0)} \cdot A_c \dot{y} \quad (4)$$

b) Voor hydrodynamische krachtskomponent

$$F'_w = -\rho g A_c \Delta H' \quad (5)$$

Omdat is aangenomen dat deze kracht lineair afhankelijk is van de schuifbeweging geldt ook

$$F_w = y A(\omega) + i y B(\omega) \quad (6)$$

c) Voor de totale kracht

$$F_{tot} = (m+m_w) \ddot{y} + c\dot{y} + ky - F'_w \quad (7)$$

geldt dus:

$$F_{tot} = (k-\omega^2 (m+m_w) - A(\omega)) y + i (c\omega - B(\omega)) y \quad (8)$$

d) Voor de beweging van het water in de leiding:

$$\Delta H' = \frac{-L}{gA_c} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (11)$$

Nu wordt nagegaan wanneer er sprake is van een harmonische beweging (geen opslingering geen demping), dit is het geval als zowel het reële als imaginaire deel van (8) gelijk aan 0 zijn.

Allereerst is nagegaan hoe groot $A(\omega)$ en $B(\omega)$ zijn. Vervolgens voor welke waarden van ω beide delen van (8) gelijk aan 0 zijn (uitdrukking (21) en (84).)

Op soortgelijke wijze is het ook mogelijk "karakteristieke" waarden voor de veerstijfheid en demping te bepalen.

Uitbreiding naar de situatie met wandwrijving I_b is mogelijk door uitdrukking (11) te vervangen door

$$\Delta H' = \frac{-L}{gA_c} \frac{\delta Q'}{\delta t} + \alpha Q' \quad (40)$$

De waarde voor α is afgeleid (47).

Op identieke wijze als boven is vervolgens ω_{kr} bepaald (78).

Uitbreiding naar de situatie met een kompressiebel medium geschiedt door vervanging van de uitdrukking (11) tussen $\Delta H'$ en Q' door een relatie waarin de kompressibiliteit is verdisconteerd. In appendix 1 is deze afgeleid als een relatie tussen $p' = \rho g \Delta H'$ en $u' = Q'/A$ (84).

Op de bekende wijze zijn vervolgens weer $A(\omega)$ en $B(\omega)$ bepaald, waarna een uitdrukking voor ω_{kr} in geval van een harmonische trilling van een ongedempte schuif is afgeleid (99).

Voor deze situatie is ook een stabiliteitsdiagram opgezet (figuur 1).

In principe moet uitbreiding naar de situatie met kompressiebel medium en met wrijving op de tot nu toe gebruikte wijze mogelijk zijn.

De analytische aanpak is evenwel bijzonder omvangrijk en tijdrovend gebleken. Nadat in appendix 2 weer een uitdrukking is gevormd voor p' en u' is op symbolische wijze het verloop van de berekening aangegeven. Maar geadviseerd wordt het stelsel vergelijkingen numeriek op te lossen.

Procedure Thomann

Thomann hanteert dezelfde beperkingen als Kolkman (WL-Ia) aanvankelijk, behalve dat het medium een ideaal gas is (kompressiebel dus).

Uitgaande van de basisvergelijkingen voor de pijpstroming start Thomann met vergelijkingen voor de vloeistofbeweging in de pijp die zeer sterke overeenkomst vertonen met die welke in appendix 1 zijn afgeleid.

Een combinatie van de formules voor de pijpstroming en schuifbeweging op $x = 1$ (einde leiding) levert een uitdrukking voor de schuifbeweging (14). Deze uitdrukking bevat een viertal parameters (zie (14a) t/m (14d)) die verder een centrale rol spelen.

Na een aantal bewerkingen (vereenvoudigingen) resulteert een vergelijking waaruit de "opslingerfactor": α en frekwentie ω zijn te bepalen (15) en (26). Thomann presenteert ook een stabiliteitsdiagram (fig. 2.4). Voor een groot aantal experimenten zijn de posities in het stabiliteitsdiagram bepaald, evenals de waarden voor α en ω .

Uit deze grafieken zijn een aantal parameters "teruggerekend" die nodig zijn om een berekening volgens WL-methodieken mogelijk te maken (tabel 2).

Procedure Weaver

Het systeem van Weaver, dat het meest omvattend is, gaat uit van de volgende veronderstellingen: het medium is niet kompressiebel, de afvoercoëfficiënt mag

variëren en er is wandwrijving. Het grote onderscheid met de overige methodieken is dat het zich niet noodzakelijkerwijze beperkt tot kleine (lineaire) verplaatsingen en debietvariatiën.

Eén en ander resulteert in een tweetal gekoppelde niet-lineaire dimensieloze differentiaalvergelijkingen (één voor de water- en één voor de schuifbeweging (10) en (12)). Voor een praktische situatie heeft Weaver deze numeriek opgelost met de Runga-Kutta methode.

Het terugwinnen van druk benedenstrooms van de schuif bleek van redelijk belang te zijn (in alle andere methodieken is deze invloed verwaarloosd). Ook Weaver presenteert een stabiliteitsdiagram en vergelijkt dit met dat van Kolkman (voorbeeld in fig. 4.1).

Een vergelijking van de diverse methoden is mogelijk aan de hand van het overzicht van hoofdstuk 3. Hier zijn de uitgangspunten, beperkingen en mogelijkheden er van opgesomd.

Experimentele gegevens

Eigenlijk alleen de modelresultaten van Thomann zijn met de WL-methodieken na te rekenen.

Thomanns resultaten zijn bewerkt (tabel 2) en in het WL-II stabiliteitsdiagram opgenomen. Op deze wijze wordt redelijk goed de overgang aangegeven van stabiel naar instabiel (figuur 2).

Daarnaast is ω_{kr} rechtstreeks bepaald uit Thomanns resultaten met behulp van een rekenprogramma voor de nulpuntsbepaling van impliciete functies. Op deze wijze is vergelijking (15) opgelost. Ook hiermee zijn redelijke resultaten geboekt (tabel 3).

Weaver geeft helaas zo weinig waarden (en onvolledig) dat slechts één situatie bleek te kunnen worden nagerekend.

Konklusie

De meest complete beschrijving van zelfexciterende trillingen is die van Weaver. Deze beperkt zich niet (wat alle overige dus wel doen) tot kleine verplaatsingen en debietvariatiën. Bovendien mag de beweging hier een niet-harmonische zijn. Evenals methode WL-III vergt Weavers methode een numerieke aanpak. Methode WL-III kan wel de situatie aan met een kompressiebel medium (Weaver niet).

Afhankelijk van de mogelijke schematisatie van het probleem zijn analytische berekeningen mogelijk voor wat het stabiliteitsgedrag betreft. (Nagaan of

$$\omega \gtrsim \omega_{kr})$$

2. Diverse theorieën

2.1 Oorspronkelijke WL-aanpak (WL-I)

2.1.0 Algemeen

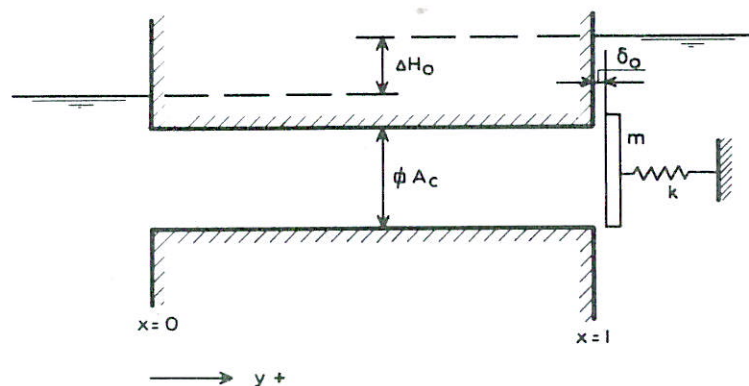
Zoals reeds eerder opgemerkt is de aanpak vooral bedoeld als een praktische mogelijkheid om te kunnen nagaan of er in een bepaalde situatie gevaar te duchten valt van zelfexciterende trillingen.

Een groot aantal vereenvoudigingen was nodig om tot een redelijk eenvoudige methodiek te komen.

Hieronder volgen allereerst deze aannames, waarna in par. 2.1.2 de opzet wordt beschreven.

2.1.1 Aannames

De schematisch geometrische opstelling is uit fig. 2.1 af te leiden.



Figuur 2.1

Schuifbewegingen

De schuifbewegingen worden voorgesteld door

$$y = \hat{y} e^{i\omega t} \quad (1)$$

y = verplaatsing van de schuif in spleetrichting (in x -richting dus)

waarbij \dot{y} klein is ten opzichte van de oorspronkelijke spleet δ_o . De meebewegende watermassa (m_w) is uitsluitend afhankelijk van condities bovenstrooms van de schuif. Het benedenstroomse aandeel is verwerkt in de traagheid van vloeistof in de leiding.

Het debiet

Het debiet wordt gepresenteerd door:

$$Q = \mu \delta L_c \sqrt{(2g\Delta H)} \tag{2}$$

waarbij:

L_c = lengte van de spleet (= omtrek leidingdoorsnede)

μ = konstante

$\delta = \delta_o + \delta' = \delta_o + y$

$\Delta H = \Delta H_o + \Delta H'$ (' geeft de dynamische component aan)

Een aanname hierbij is dat het debiet door de spleet onmiddellijk over de leidingdoorsnede wordt gespreid zonder verder verlies of traagheid.

Voor $Q' = (Q - Q_o)$ geldt na linearisatie:

$$Q' = \frac{\partial Q}{\partial \delta} \delta' + \frac{\partial Q}{\partial \Delta H} \Delta H'$$

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} + \frac{1}{2}\mu \delta_o L_c \Delta H' \sqrt{(2g/\Delta H_o)} \tag{3}$$

Rekening houdend met het zuigereffekt geldt voor het debiet door de spleet:

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} + \frac{1}{2}\mu \delta_o L_c \Delta H' \sqrt{(2g/\Delta H_o)} - A_c \dot{y} \tag{4}$$

Hydrodynamische kracht op de schuif

Door de (variërende) stroming wordt op de schuif een kracht uitgeoefend groot:

$$F_w = - \rho g A_c \Delta H$$

voor de dynamische component geldt:

$$F_w' = - \rho g A_c \Delta H' \tag{5}$$

Voor de hydrodynamische kracht wordt verder aangenomen dat deze lineair afhankelijk is van de trillingsbeweging van de schuif

$$F_w = y A(\omega) + y i B(\omega) \quad (6)$$

De totale kracht

Deze wordt voorgesteld door

$$F_{tot} = + (m+m_w) \ddot{y} + c \dot{y} + k y - F'_w \quad (7)$$

m_w = meebewegende watermassa (in feite alleen het deel buiten de leiding)

$$F_{tot} = + (-\omega^2 \hat{y} e^{i\omega t}) (m+m_w) + c i\omega \hat{y} e^{i\omega t} + k \hat{y} e^{i\omega t} - y A(\omega) - iy B(\omega)$$

of:

$$F_{tot} = \{k - \omega^2 (m+m_w) - A(\omega)\} y + i(c\omega - B(\omega)) y \quad (8)$$

In het geval van een harmonische beweging (de "start-aanname" van de WL-aanpak) is $F_{tot} = 0$.

$$\text{dus } k - \omega^2 (m+m_w) - A(\omega) = 0 \quad (9)$$

$$\text{en } c\omega - B(\omega) = 0 \quad (10)$$

Samendrukbaarheid van de vloeistof

In deze benadering is de vloeistof als niet-kompressiebel beschouwd, dit komt tot uitdrukking in de relatie die de beweging van het water in de leiding beschrijft:

$$\Delta H' = - L/gA_c \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (11)$$

Het minteken ontstaat doordat een positief extra verval $\Delta H'$ over de schuif veroorzaakt wordt door een vermindering van de druk aan de leidingzijde en deze doet de snelheid in de leiding afnemen.

2.1.2 Aanpak

De procedure die gevolgd wordt om allereerst de relatie $F'_w = F'_w(y)$ (6) vast te stellen is gebaseerd op de volgende overwegingen:

Allereerst: F'_w is een functie van $\Delta H'$ volgens:

$$F'_w = -\rho g A_c \Delta H' \quad (5)$$

Verder: Q' is een functie van $\Delta H'$ en wel:

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} + \frac{1}{2}\mu \delta_o L_c \Delta H' \sqrt{(2g/\Delta H_o)} - A_c \dot{y} \quad (4)$$

en:

$$\Delta H' = - (L/gA_c) \frac{\partial Q'}{\partial t} \quad (11)$$

Door (4) te differentiëren naar t , en (5) en (11) hierin te verwerken resulteert:

$$F'_w + \left(\frac{\mu \delta_o L_c L}{A_c \sqrt{(2g/\Delta H_o)}} \right) \dot{F}'_w = \rho \mu L L_c \sqrt{(2g/\Delta H_o)} \cdot \dot{y} - \rho L A_c \ddot{y} \quad (12)$$

nu wordt verondersteld dat:

$$F'_w = \hat{F}'_w e^{i\omega t} \quad (13)$$

$$y = \hat{y} e^{i\omega t} \quad (14)$$

zodat

$$\hat{F}'_w + \frac{\mu \delta_o L_c L}{A_c \sqrt{(2g\Delta H_o)}} \cdot i\omega \hat{F}'_w = \rho \mu L L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} i\omega \hat{y} + \rho L A_c \omega^2 \hat{y} \quad (15)$$

of

$$r'_w = \frac{\omega^2 \rho L A_c (1 + \mu^2 \delta_o L L_c^2 / A_c^2)}{1 + (\omega \mu \delta_o L L_c / \sqrt{(2g\Delta H_o)})^2} \hat{y} + \frac{\omega \rho \mu L L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} (1 - \omega \delta_o L / \sqrt{(2g\Delta H_o)})}{1 + (\omega \mu \delta_o L L_c / (A_c \sqrt{(2g\Delta H_o)}))^2} i \hat{y} \quad (16)$$

zodat met (6) volgt dat:

$$A(\omega) = \frac{\omega^2 \rho L A_c (1 + \mu^2 \delta_o L L_c^2 / A_c^2)}{1 + (\omega \mu \delta_o L L_c / A_c \sqrt{(2g\Delta H_o)})^2} \quad (17)$$

$$B(\omega) = \frac{\omega \rho \mu L L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} (1 - \omega^2 \delta_o L / (2g\Delta H_o))}{1 + (\omega \mu \delta_o L L_c / (A_c \sqrt{(2g\Delta H_o)}))^2} \quad (18)$$

2.1.3 Stabiliteit ongedempte schuif

In het geval van een niet gedempte schuif (met andere woorden $c = 0$) zal voor het geval van een stationair harmonische trilling gelden:

$$B(\omega) = 0 \quad (19)$$

Immers uit (8) volgt voor de "kritieke" situatie

$$c\omega_{kr} - B(\omega_{kr}) = 0 \quad (10)$$

Uit (18) volgt dat $B(\omega_{kr}) = 0$ indien

$$1 - \frac{\omega_{kr}^2 \delta_o L}{2g\Delta H_o} = 0 \quad (20)$$

of

$$\omega_{kr} = \sqrt{\left(\frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L}\right)} \quad (21)$$

Is er wel een demping ($c > 0$) dan kan B groter zijn en dus mag ω_{kr} verkleinen. Is in een bepaalde situatie aan de voorwaarden van par. 2.1.1 voldaan, dan is het systeem stabiel indien de $\omega > \omega_{kr}$.

Definieert men een Strouhalgetal $S = \frac{f L}{v}$ als

$$S = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\delta_o}{\sqrt{(2g\Delta H_o)}} \quad (22)$$

dan is:

$$S_{kr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\delta_o}{L}\right)} \quad (23)$$

Het systeem is stabiel indien $S > S_{kr}$

voor

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L}\right)} \quad (21)$$

gaat (17) over in:

$$A(\omega) = \frac{2\rho g\Delta H_o A_c}{\delta_o} \quad (24)$$

Kolkman maakt aannemelijk in [9] dat $A(\omega) = 2\rho g\Delta H_o A_c / \delta_o$ kan worden gezien als een negatieve veerstijfheid (onder veronderstelling dat het debiet konstant blijft; dit is aannemelijk bij hogere frekwenties); dus

$$A(\omega) = -k_w \quad (25)$$

Voor de "kritieke" situatie van een stationaire harmonische trilling geldt ook voor het reële deel van (8):

$$\{k - \omega^2 (m+m_w) - A(\omega)\} = 0 \quad (9)$$

of:

$$k - \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} (m+m_w) + k_w = 0 \quad (26)$$

of:

$$\frac{k}{-k_w} = 1 + \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} (m+m_w) / \left(\frac{2\rho g\Delta H_o A_c}{\delta_o}\right)$$

zodat:

$$\frac{k}{-k_w} = 1 + \frac{m+m_w}{\rho A_c L} \quad (27a)$$

of:

$$k = \frac{2\rho g \Delta H_o A_c}{\delta_o} \left(\frac{m+m_w}{\rho A_c L} + 1 \right) \quad (27b)$$

$$c_k = 1 + c_m \quad (28)$$

c_k = stijfheidscoëfficiënt ($k/-k_w$)

c_m = massacoëfficiënt: verhouding schuifmassa - massa vloeistof in de leiding

2.1.4 Stabiliteit gedempte schuif

Wordt rekening gehouden met de eventuele aanwezige demping c dan moet gelden

$$c\omega - B(\omega) = 0 \quad (10)$$

dus

$$c\omega - \frac{\omega\rho\mu L L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} (1-\omega^2 \delta_o L/(2g\Delta H_o))}{1 + (\omega\mu \delta_o L L_c / (A_c \sqrt{(2g\Delta H_o)}))^2} = 0 \quad (29)$$

of

$$c\omega + \frac{c\omega^3 \mu^2 \delta_o^2 L^2 L_c^2}{A_c^2 2g\Delta H_o} - \omega\rho\mu L L_c \sqrt{2g\Delta H_o} + \frac{\omega^3 \rho\mu L^2 L_c}{\sqrt{(2g\Delta H_o)}} = 0 \quad (30)$$

of

$$\left(\frac{c\mu^2 \delta_o^2 L^2 L_c^2}{A_c^2 2g\Delta H_o} + \frac{\rho\mu \delta_o L^2 L_c}{\sqrt{(2g\Delta H_o)}} \right) \omega^2 + c - \rho\mu L L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} = 0 \quad (31)$$

Met andere woorden

$$P \omega^2 + Q = 0 \quad (32)$$

dus

$$\omega = \pm \sqrt{(-Q)/P} \quad (33)$$

Hieruit volgt dat

$$\omega = \left[\frac{2g\Delta H_o - \frac{c\sqrt{(2g\Delta H_o)}}{\mu\rho L L_c}}{\delta_o L \left(\frac{c\mu\delta_o L_c}{\rho A_c^2 \sqrt{(2g\Delta H)}} + 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Evenzo geldt voor het reële deel van (8)

$$k - \omega^2 (m+m_w) - A(\omega) = 0 \quad (9)$$

nu is:

$$k - \left[\frac{2g\Delta H_o - \frac{c\sqrt{(2g\Delta H_o)}}{\mu\rho L L_o}}{\delta_o L \left(\frac{c\mu\delta_o L_c}{\rho A_c^2 \sqrt{(2g\Delta H_o)}} + 1 \right)} \right] (m+m_w) + k_w = 0 \quad (35)$$

$$\text{waarbij: } -k_w = A(\omega) = \frac{2\rho g\Delta H_o A_c}{\delta_o} \quad (25)$$

Zodat:

$$\frac{k}{-k_w} = 1 + [\dots] (m+m_w) / \frac{(2\rho g\Delta H_o A_c)}{\delta_o} \quad (36)$$

$$\frac{k}{-k_w} = 1 + [[\dots] \frac{\delta_o}{2g\Delta H}] \frac{m+m_w}{\rho A_c} \quad (37)$$

of:

$$\frac{k}{-k_w} = 1 + \left[\frac{1 - \frac{c}{\mu\rho L L_c \sqrt{(2g\Delta H)}}}{1 + \frac{c\mu\delta_o L_c}{\rho A_c^2 \sqrt{(2g\Delta H)}}} \right] \frac{m+m_w}{\rho A_c L} \quad (38)$$

Vereenvoudigde schrijfwijze:

$$c_k = 1 + \alpha(c) c_m \quad (39)$$

In geval van $c = 0$ is $\alpha = 0$ en is (39) identiek aan (28).

2.2 Uitbreiding WL-aanpak naar toepassing met wandwrijving (WL-Ib)

2.2.0 Algemeen

De in par. 2.1.1 vermelde stromingsvergelijkingen dienen nu zodanig te worden aangepast, dat hiermee de invloed van de wrijving wordt beschreven.

In par. 2.2.1 wordt deze uitbreiding gegeven, waarna gebruik makend van de aanpak van par. 2.1.2, $A(\omega)$ en $B(\omega)$ uit (7) worden bepaald in par. 2.2.2 terwijl in par. 2.2.3 de stabiliteitsgrens wordt aangeduid.

2.2.1 Aanpak

Opnieuw gelden als uitdrukkingen voor:

het debiet:

$$Q = \mu \delta L_c \sqrt{(2g\Delta H)} \quad (2)$$

voor $Q' = (Q - Q_0)$ geldt na linearisatie:

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{(2g\Delta H_0)} + \frac{1}{2}\mu \delta_0 L_c \Delta H' \sqrt{2g/\Delta H_0} - A_c \dot{y} \quad (4)$$

de hydrodynamische kracht op de schuif:

$$F'_w = -\rho g A_c \Delta H' \quad (5)$$

De waterbeweging in leiding:

Ten gevolge van extra verval over de schuif wordt hierdoor de wandwrijving in rekening gebracht met behulp van:

$$\Delta H' = \frac{-L}{g A_c} \frac{\partial Q'}{\partial t} + \alpha Q' \quad (40)$$

Voor de (voorlopig) stationaire wrijving geldt:

$$\rho g h \Delta H_w A_c = \tau \cdot L_c L = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 L_c L \quad (41)$$

ΔH_w = "extra" verval ten gevolge van wrijving

$$\Delta H_w = \frac{v^2}{2g} \lambda \frac{L_c L}{A_c} \quad (42)$$

$$\Delta H_w = \frac{Q^2}{2g} \frac{\lambda L_c L}{A_c^3} \quad (43)$$

na linearisatie $Q = Q_0 + Q'$

$$\Delta H_w' = \frac{Q_0 \lambda L_c L}{g A_c^3} Q' \quad (44)$$

Uit (43) volgt:

$$Q_0 = \sqrt{\left(\frac{A_c}{\lambda L_c L}\right)} \cdot A_c \sqrt{(2g\Delta H)} \quad (45)$$

zodat voor (45) kan worden geschreven:

$$\Delta H_w' = \frac{\sqrt{A_c} A_c \sqrt{(2g\Delta H_0)}}{\sqrt{(v L_c L)} g A_c^3} \lambda L L_c \cdot Q' \quad (46)$$

dit is:

$$\Delta H_w' = \frac{\sqrt{(\lambda L L_c)} \sqrt{(2g\Delta H_0)}}{g A_c^{3/2}} Q' \quad (47)$$

dus het stelsel vergelijkingen luidt:

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{2g\Delta H_0} + \frac{1}{2}\mu \delta_0 L_c \Delta H' \sqrt{(2g/\Delta H_0)} - A_c \dot{y} \quad (4)$$

$$-\Delta H' = \frac{L}{g A_c} \dot{Q} + \frac{\sqrt{(\lambda L L_c)} \sqrt{(2g\Delta H_0)}}{g A_c^{3/2}} \cdot Q' \quad (48)$$

$$F_w' = -\rho g A_c \Delta H' \quad (5)$$

Ook nu gelden de vooronderstellingen als:

$$Q = \hat{Q} e^{i\omega t}$$

$$y = \hat{y} e^{i\omega t}$$

$$F = \hat{F} e^{i\omega t}$$

Stel:

$$A = \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \quad (49)$$

$$B = \frac{\mu \delta L_c}{2} \sqrt{(2g/\Delta H_o)} \quad (50)$$

$$C = A_c \quad (51)$$

$$D = \frac{L}{g A_c} \quad (52)$$

$$E = \frac{\sqrt{(\lambda L L_c)} \sqrt{(2g\Delta H_o)}}{g A_c^{3/2}} \quad (53)$$

$$G = \rho g A_c \quad (54)$$

dan wordt

$$Q = A y + B \Delta H' - C \dot{y} \quad (55)$$

$$\Delta H' = D \dot{Q} - E Q' \quad (56)$$

$$F' = -G \Delta H' \quad (57)$$

en dus

$$\dot{Q} = A \dot{y} + B \Delta H - i\omega C y \quad (58)$$

$$-\Delta H' = i\omega D \dot{Q} + E Q \quad (59)$$

$$\dot{Q} = \frac{-\Delta \hat{H}}{i\omega D + E} \quad (60)$$

(60) in (58) invullen levert:

$$\frac{-\Delta \hat{H}}{i\omega D + E} = A \dot{y} + B \Delta \hat{H} - i\omega C y \quad (61)$$

$$\frac{-\Delta \hat{H}}{i\omega D + E} - B \Delta \hat{H} = A \dot{y} - i\omega C y \quad (62)$$

$$\Delta \hat{H} = - \hat{y} \frac{(A - i\omega C)}{\left(\frac{1}{i\omega D + E} + B\right)} \quad (63)$$

$$\Delta \hat{H} = \hat{y} \frac{-(\omega^2 CD + AE) + i\omega(CE - AD)}{(1 + BE) + i BD \omega} \quad (64)$$

$$\Delta \hat{H} = \hat{y} \frac{-(\omega^2 CD + AE)(1 + BE) + \omega^2 BD(CE - AD)}{(1 + BE)^2 + (BD \omega)^2} + i\omega \hat{y} \frac{BD(\omega^2 CD + AE) + (1 + BE)(CE - AD)}{(1 + BE)^2 + BD \omega^2} \quad (65)$$

of omdat

$$F'_w = - \rho g A_c \Delta H' \quad (5)$$

is:

$$F = - \rho g A_c \frac{-(\omega^2 CD + AE)(1 + BE) + m^2 BD(CE - AD)}{(1 + BE)^2 + (BD \omega)^2} \hat{y} + \rho g A_c i\omega \frac{BD(\omega^2 CD + AE) + (1 + BE)(CE - AD)}{(1 + BE)^2 + (BD \omega)^2} \hat{y} \quad (66)$$

en dit is van de vorm

$$F = A(\omega) \hat{y} + i B(\omega) \hat{y} \quad (6)$$

2.2.2 Stabiliteit van een ongedempte schuif

Voor het geval van de stationaire harmonische trilling zonder demping ($c = 0$) geldt:

$$B(\omega) = 0 \quad (19)$$

dus:

$$BCD^2 \omega^2 + ABDE + (1 + BE)(CE - AD) = 0 \quad (67)$$

of:

$$\omega^2 = - \frac{(1 + BE)(CE - AD)}{BCD^2} - \frac{AE}{CD}$$

$$\omega^2 = \frac{AD - DCE^2 - CE + ABDE}{BCD^2} - \frac{ABDE}{BCD^2} \quad (68)$$

In geval van geen wandwrijving is $E = 0$ en

$$\omega^2 = \frac{AD}{BCD^2} = \frac{A}{BCD} \quad (69)$$

omdat

$$A = \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \quad (49)$$

$$B = \frac{\mu \delta_o L_c}{2} \sqrt{(2g/\Delta H_o)} \quad (50)$$

$$C = A_c \quad (51)$$

$$D = \frac{L}{g A_c} \quad (52)$$

volgt

$$\omega^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L}$$

Dit is inderdaad uitdrukking (20).

Met wandwrijving wordt dit:

$$\omega^2 = \frac{A}{BCD} - \frac{BE^2 + E}{BD^2} \quad (70)$$

Zolang de demping ten gevolge van de wrijving gering is geldt:

$$\omega^2 = \omega_o^2(1-\epsilon) \quad (71)$$

dus

$$\omega^2 = \frac{A}{BCD} \left(1 - \frac{BCD}{A} \left(\frac{BE^2 + E}{BD^2} \right) \right) \quad (72)$$

$$= \frac{A}{BCD} \left(1 - \frac{BCE^2 + CE}{AD} \right)$$

$$= \frac{A}{BCD} \left(1 - \frac{CE}{AD} (1 + BE) \right) \quad (73)$$

$$BE = \frac{\mu \delta_o L_c \sqrt{(2g/\Delta H_o)}}{2} * \frac{\sqrt{(\lambda L_c L)} \sqrt{(2g\Delta H_o)}}{g A_c^{3/2}} = \frac{\mu \delta L_c \sqrt{(\lambda L_c L)}}{A_c^{3/2}} = \mu \sqrt{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\delta^2 L L^3}{A_c^3}\right)} \quad (74)$$

is nu

$$L_c = \pi D$$

en

$$A_c = \pi/4 D^2$$

terwijl

$$L/D = s$$

dan is

$$BE = \frac{8\mu}{\pi} \sqrt{\lambda} \sqrt{\left(s \frac{\delta^2}{D^2}\right)} \quad (75)$$

$$\frac{CE}{AD} = \frac{A_c \sqrt{(\lambda L_c L)} \cdot \sqrt{(2g\Delta H_o)} \cdot g A_c}{g A_c^{3/2} \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \cdot L} \quad (76)$$

$$\frac{CE}{AD} = \frac{\sqrt{(A_c \lambda)}}{\mu \sqrt{(L L_c)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{s}\right)} \cdot \frac{1}{\mu} \quad (77)$$

dus

$$\omega^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} \left\{ 1 - \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{s}\right)} \left(1 + \frac{8\delta_o \mu}{D\pi} \sqrt{(s\lambda)} \right) \right\} \quad (78)$$

bij kleinere spleetopening is δ/D klein; en kan ω^2 benaderd worden door:

$$\omega^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} \left\{ 1 - \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{s}\right)} \right\} = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} (1-\epsilon) \quad (79)$$

terwijl dan

$$\epsilon = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{s}\right)}$$

$$\mu = \text{kontraktiecoëfficiënt} \quad [-]$$

$$\lambda = \text{wrijvingscoëfficiënt} \quad [\tau / (\frac{1}{2}\rho v^2)]$$

$$s = \text{lengtecoëfficiënt} \quad [L/D]$$

Evenals voor (27) is gebeurd kan ook nu weer de stijfheid berekend worden, inclusief de invloed van de wandwrijving. Deze volgt uit (9) met invulling van ω in de term $A(\omega)$. Hier is helaas geen "elegante" oplossing te bereiken.

2.3 Uitbreiding WL-aanpak naar kompressiebel medium (WL-II)

2.3.0 Algemeen

De volgende stap in de uitbreiding, was de methodiek aan te passen, zodanig dat kompressiebele media hierbij mogelijk zijn. Verder zijn dezelfde aannames gehanteerd als in par. 2.1.1. De eenvoudige aanname waarmee de (on)samendrukbaarheid van de vloeistof werd aangeduid:

$$\Delta H' = \frac{-L}{g A_c} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (11)$$

vervalt en dient door een andere, die de samendrukbaarheid beschrijft te worden vervangen.

Deze relatie tussen ΔH en Q (of p en u) wordt beschreven in appendix 1. Vervolgens wordt de methodiek van par. 2.1.2 weer benut; deze wordt in par. 2.3.1 beschreven.

2.3.1 Aanpak

De aanpak loopt volledig parallel aan die van par. 2.1.2:

Naast

$$F'_w = - \rho g A_c \Delta H' \quad (5)$$

en

$$Q' = \mu y L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} + \frac{1}{2}\mu \delta_o L_c \Delta H' \sqrt{(2g/\Delta H_o)} - A_c \dot{y} \quad (4)$$

is de relatie tussen $\Delta H'$ en Q' noodzakelijk, of omdat

$$\rho g \Delta H' = p' \text{ en}$$

$$Q' = A_c u'$$

is de relatie tussen p' en u' ook bruikbaar.

Uit appendix 1 volgt:

$$p' = \rho_0 a_0 \left[A_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{x}{a_0(1+M)}\right)\right\} - B_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{x}{a_0(1-M)}\right)\right\} \right] \quad (80)$$

en

$$u' = A_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{x}{a_0(1+M)}\right)\right\} + B_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{x}{a_0(1-M)}\right)\right\} \quad (81)$$

waarin:

- p = druk (eigenlijk: $p(x,t)$)
- p_0 = druk in ongestoorde (uniforme) toestand
- p' = oscillerend deel van de druk ($p = p_0 + p'$)
- u = snelheid (eigenlijk: $u(x,t)$)
- u_0 = snelheid in ongestoorde (uniforme) toestand
- u' = oscillerend deel van de snelheid ($u = u_0 + u'$)
- ρ_0 = druk in de ongestoorde uniforme toestand
- a_0 = voortplantingssnelheid voor kleine drukverstoringen
- A_u = $(\alpha+i\omega)/(1+M) \cdot A_y$ (A_y een konstante uit de algemene oplossing)
- B_u = $(\alpha+i\omega)/(1-M) \cdot B_y$ (B_y een konstante uit de algemene oplossing)
- $(\alpha+i\omega)$ = exponent uit gekozen oplossingsvorm: $u' = u(x) e^{(\alpha+i\omega)t}$
- M = Machgetal = u_0/a_0 (maat voor de samendrukbaarheid)

In een situatie als van fig. 2.1 is voor

$$x = 0 : p' = 0$$

$$x = L : u' = \hat{u}' e^{i\omega t}$$

(waarbij $u' = dy/dt$; $\alpha = 0$ als gevolg van randvoorwaarden bij statische beweging)

Deze randvoorwaarden leveren op dat

$$A_u = B_u \quad (82)$$

$$\hat{u}' = A_u \left\{ \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(\frac{-L}{a_0(1+M)}\right)\right\} + \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(\frac{L}{a_0(1-M)}\right)\right\} \right\} \quad (83)$$

$\alpha = 0$ dus:

$$A_u = \hat{u}' / \left(\exp \frac{-i\omega L}{a_o(1+M)} + \exp \frac{i\omega L}{a_o(1-M)} \right)$$

waaruit volgt:

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{u}'}(x) = -i \rho_o a_o \operatorname{tg} \frac{\omega x}{a_o(1-M^2)} \quad (84)$$

Omdat $\hat{F}'_w = -\hat{p}' A_c$ en $Q' = \hat{u}' A_c$ kan (84) geschreven worden als

$$\hat{F}'_w = +i \rho_o a_o \operatorname{tg} \frac{\omega x}{a_o(1-M^2)} Q' \quad (85)$$

Dit ingevuld in (4), dat ook geschreven kan worden als

$$Q' = \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \hat{y} + \frac{1}{2}\mu \delta_o L_c \sqrt{(2g/\Delta H_o)} \Delta H' - i A_c \omega \hat{y}$$

$$\text{en rekening houdend met } \Delta H' = \hat{F}'_w / (-\rho g A_c) \quad (5)$$

levert als $x = L$ op:

$$\frac{+\hat{F}'_w}{i \rho_o a_o \operatorname{tg} \frac{\omega L}{a_o(1-M^2)}} = \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \hat{y} + \frac{1}{2}\mu \delta_o L_c \sqrt{\left(\frac{2g}{\Delta H_o}\right)} \frac{\hat{F}'_w}{-\rho_o g A_c} - i A_c \omega \hat{y} \quad (86)$$

of:

$$\hat{F}'_w \left(\frac{1}{i \rho_o a_o \operatorname{tg} \frac{\omega L}{a_o(1-M^2)}} + \frac{\mu \delta_o L_c}{\rho_o A_c} \sqrt{\left(\frac{1}{2g\Delta H_o}\right)} \right) = (\mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} - i A_c \omega) \hat{y} \quad (87)$$

Stel nu dat

$$\gamma = \operatorname{tg} \frac{\omega L}{a_o(1-M^2)} \quad (88)$$

$$C_1 = \frac{\mu \delta_o L_c}{\rho_o A_c} \sqrt{\left(\frac{1}{2g\Delta H_o}\right)} \quad (89)$$

$$C_2 = \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \quad (90)$$

dan wordt (87)

$$\left(\frac{1}{i \rho_o a_o \gamma} + C_1\right) \hat{F}'_w = (C_2 - i A_c \omega) \hat{y} \quad (91)$$

dus:

$$\hat{F}'_w = \frac{(i \rho_o a_o \gamma)(C_2 - i A_c \omega) \hat{y}}{1 + i C_1 \rho_o a_o \gamma}$$

zodat

$$\hat{F}'_w = \frac{\rho_o a_o \gamma (i + C_1 \rho_o a_o \gamma)(C_2 - i A_c \omega) \hat{y}}{1 + (C_1 \rho_o a_o \gamma)^2}$$

of wel

$$\hat{F}'_w = \frac{\rho_o a_o \gamma [(C_1 C_2 \rho_o a_o \gamma + A_c \omega) + i(C_2 - A_c C_1 \omega \rho_o a_o \gamma)]}{1 + (C_1 \rho_o a_o \gamma)^2} \hat{y} \quad (92)$$

Omdat per definitie geldt:

$$F'_w = [A(\omega) + i B(\omega)] \hat{y} \quad (6)$$

volgt hieruit dat

$$A(\omega) = \frac{\rho_o a_o \gamma}{1 + C_1 \rho_o a_o \gamma)^2} (C_1 C_2 \rho_o a_o \gamma + A_c \omega) \quad (93)$$

en

$$B(\omega) = \frac{\rho_o a_o \gamma}{1 + (C_1 \rho_o a_o \gamma)^2} (C_2 - A_c C_1 \omega \rho_o a_o \gamma) \quad (94)$$

waarbij dus:

$$\gamma = \operatorname{tg} \frac{\omega L}{a_o (1-M^2)} \quad (88)$$

$$C_1 = \mu \delta_o L_c / (\rho_o A_c \sqrt{(2g\Delta h_o)}) \quad (89)$$

$$C_2 = \mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} \quad (90)$$

2.3.2 Stabiliteit ongedempte schuif

In het geval van een harmonische beweging en een ongedempte schuif (dus $c = 0$), moet ook hier $F_{\text{tot}} = 0$, waardoor net als in par. 2.1.3

$$c \omega_{kr} - B(\omega_{kr}) = 0 \quad (10)$$

dus

$$B(\omega_{kr}) = 0$$

Dit is het geval indien

a) $\gamma = 0$ dus:

$$\text{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o (1-M^2)} = 0 \quad (95)$$

of:

$$\omega_{kr} = \frac{n\pi(a_o (1-M^2))}{L} \quad (96)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

b) $C_2 - A_c C_1 \omega_{kr} \rho_o a_o \gamma = 0$ dus

$$\gamma = \text{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o (1-M^2)} = \frac{C_2}{A_c C_1 \omega_{kr} \rho_o a_o} \quad (97)$$

of:

$$\text{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o (1-M^2)} = \frac{2g\Delta H_o}{a_o \delta_o \omega_{kr}} \quad (98)$$

Dit is te schrijven als

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} \frac{\frac{\omega_{kr} L}{a_o}}{\text{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o (1-M^2)}} \quad (99)$$

N.B.: In het geval van onsamendrukbaar medium ($a_o = \infty$) is:

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} \quad (21)$$

In het geval van een samendrukbaar medium moet (21) dus worden uitgebreid tot

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} * \frac{L}{L_{fictief}} \quad (100)$$

waarbij

$$L_{fictief} = \frac{a_o}{\omega_{kr}} * \operatorname{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o (1-M^2)} \quad (101)$$

of omdat

$$a_o = \sqrt{(E/\rho_o)} \quad (102)$$

ook wel:

$$L_{fictief} = \sqrt{\left(\frac{E}{\rho_o \omega_{kr}^2}\right)} * \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\rho_o \omega_{kr}^2}{E}\right)} * \frac{L}{(1-M^2)} \right\} \quad (103)$$

waarbij (100) overgaat in

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho_o \omega_{kr}^2}{E}\right)} L}{\operatorname{tg} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\rho_o \omega_{kr}^2}{E}\right)} \frac{L}{(1-M^2)} \right\}} \quad (104)$$

dit is weer gelijk aan (99)

De term $L \sqrt{(\rho_o \omega_{kr}^2 / E)}$ is ook te zien als de relatie van $2\pi L$ en λ
 $\lambda =$ golflengte van de kompressiegolf:

$$\lambda = T \sqrt{\left(\frac{E}{\rho_o}\right)} = \frac{2\pi}{\omega_{kr}} \sqrt{\left(\frac{E}{\rho_o}\right)} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{E}{\rho_o \omega_{kr}^2}\right)}$$

De invloed van het Machgetal M is een gevolg van het feit dat de voortplantingssnelheid heen en terug verschillen ($v \pm \sqrt{(E/\rho_o)}$).

Met behulp van (104) kan voor het geval van een harmonische beweging bij een ongedempte schuif in een samendrukbare "vloeistof" een stabiliteitsdiagram worden gekreëerd.

In figuur 1 is

$$Y = \frac{\omega_{kr}^2 \delta_o L}{2g\Delta H_o} \text{ uitgezet als functie van}$$

$$X = L \sqrt{\left(\frac{\rho_o \omega_{kr}^2}{E} \right)}$$

zodat

$$Y = X / \text{tg} \left(\frac{X}{1-M^2} \right) \quad (105)$$

Dit is gedaan voor een aantal waarden van M. In deze figuur is tevens aangegeven voor welke waarden van X en Y de trilling stabiel resp. instabiel is.

De functie $Y = X / \text{tg} \frac{X}{(1-M^2)}$ heeft asymptoten voor $\text{tg} \left(\frac{X}{1-M^2} \right) \rightarrow \infty$ dus voor

$$\frac{X}{1-M^2} \rightarrow n \cdot \pi$$

$$\text{dus } X \rightarrow n(1-M^2) \pi$$

n is natuurlijk getal.

In de kritieke situatie van de harmonische trilling geldt dat ook het reële deel van (8)

$$k - \omega^2(m+m_w) - A(\omega) = 0 \quad (9)$$

$$A(\omega) = \frac{\rho_o a_o \gamma}{1 + (C_1 \rho_o a_o \gamma)^2} (C_1 C_2 \rho_o a_o \gamma + A_c \omega) \quad (93)$$

Nu was gevonden dat de ongedempte schuif niet in trilling kan raken als:

$$\gamma = \frac{C_2}{A_c C_1 \omega_{kr} \rho_o a_o} \quad (97)$$

Dus geldt volgens (93)

$$A(\omega) = \frac{\left(\frac{C_2}{\omega_{kr} A_c C_1}\right) \cdot \left(\frac{C_2^2}{\omega_{kr} A_c} + \omega_{kr} A_c\right)}{1 + \left(\frac{C_2}{\omega_{kr} A_c}\right)^2} = \frac{C_2}{C_1} \quad (106)$$

$$A(\omega) = \frac{\rho_o A_c 2g\Delta H_o}{\delta_o} = -k_w \quad (107)$$

Uitdrukking (107) is volledig identiek aan (24)

nu is

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} * \frac{L}{L_{fic}} \quad (100)$$

Zodat geldt:

$$\frac{k}{-k_w} = c_k = 1 + c_m * \frac{L}{L_{fic}} \quad (\text{vergelijk (28)}) \quad (108)$$

2.4 Uitbreiding WL-aanpak naar kompressiebel medium en wandwrijving (WL-III)

2.4.0 Algemeen

De in appendix 1 gebruikte gelineariseerde stromingsvergelijkingen dienen te worden uitgebreid met termen die de wrijvingsinvloed beschrijven.

In appendix 2 zijn deze gegeven, waarna in deze appendix de relatie tussen p en u (en dus tussen ΔH en Q) wordt bepaald.

Opnieuw wordt de methodiek van par. 2.1.2 gebruikt (in par. 2.4.1 beschreven) waarna uitdrukkingen voor A(ω) en B(ω) uit (6) worden gegeven.

2.4.1 Aanpak

Uitgaande van opnieuw (4) en (5) uit par. 2.1.1 is de relatie tussen p' en u' nodig. Deze is volgens appendix 2 te beschrijven met:

$$p' = \rho_o a_o \left[A_u \frac{q}{(1-M^2)-Mq} \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} + B_u \frac{k}{(1-M^2)+Mk} \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \right] \quad (109)$$

$$u' = A_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} + B_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \quad (110)$$

waarbij p' wordt beschreven ten opzichte van

$$p_0^* = p_0 + \rho_0 a_0 C M \left(t - \frac{x}{a_0 M} \right) \quad (111)$$

terwijl:

$$C = \theta \left| u_0 \right| u_0$$

$$M = u_0 / a_0$$

door de wrijving is p in de leiding, ook in de stationaire situatie, niet konstant

verder is

$$\gamma = 2\theta \left| u_0 \right| \text{ (wrijvingskonstante)}$$

$$q = q_1 + q_2 i \quad \text{en} \quad k = k_1 + k_2 i$$

hierbij is:

$$q_1 = \frac{1}{\eta^2 + 1} \{ \eta(z_1 - Mr_1) + z_2 - Mr_2 \} \quad (112)$$

$$q_2 = \frac{1}{\eta^2 + 1} \{ -(z_1 - Mr_1) + \eta(z_2 - Mr_2) \} \quad (113)$$

$$k_1 = \frac{1}{\eta^2 + 1} \{ \eta(z_1 + Mr_1) + z_2 + Mr_2 \} \quad (114)$$

$$k_2 = \frac{1}{\eta^2 + 1} \{ -(z_1 + Mr_1) + \eta(z_2 + Mr_2) \} \quad (115)$$

terwijl:

$$\eta = \frac{\alpha}{\omega} \quad \text{en} \quad \xi = \frac{\lambda}{\omega}$$

en:

$$z = z_1 + iz_2$$

$$z_1 = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{a_2}{a_1}\right) \quad (116)$$

$$z_2 = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{a_2}{a_1}\right) \quad (117)$$

$$\text{voor } -\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{a_2}{a_1} < \frac{\pi}{2}$$

en:

$$a_1 = \xi^2 \frac{M^2}{4} + \eta^2 - 1 + \eta\xi \quad (118)$$

$$a_2 = 2\eta + \xi \quad (119)$$

tenslotte is:

$$r = r_1 + ir_2 \quad (120)$$

$$r_1 = \eta + \frac{1}{2}\xi$$

$$r_2 = 1$$

In de situatie van fig. 2.1 is voor

$$x = 0: p' = 0$$

$$x = 1: u' = \hat{u}' e^{i\omega t}$$

Deze randvoorwaarden ingevuld, leiden tot:

$$A_u = \frac{k\{(1-M^2) - qM\}}{q\{(1-M^2) + kM\}} B_u \quad (121)$$

en

$$\hat{u}' e^{i\omega t} = A_u \exp\left\{(\alpha + i\omega)\left(t - \frac{qL}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} + B_u \exp\left\{(\alpha + i\omega)\left(t + \frac{kL}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \quad (122)$$

als $u' = \hat{u}' e^{i\omega t}$ dan ($\alpha=0$) is:

$$\begin{aligned} \hat{u}' &= A_u \exp\left(-\frac{qL(i\omega)}{a_o(1-M^2)}\right) + B_u \exp\left(\frac{kL(i\omega)}{a_o(1-M^2)}\right) \\ \hat{u}' &= A_u \exp\left(\frac{(-q)(i\omega)}{a_o(1-M^2)}\right) + \frac{q\{(1-M^2) + kM\}}{k\{(1-M^2) - qM\}} A_u \exp\left(\frac{kL(i\omega)}{a_o(1-M^2)}\right) \end{aligned} \quad (123)$$

Zodat:

$$A_u = \hat{u}' * \frac{1}{\left(1 + \frac{q\{(1-M^2) + kM\}}{k\{(1-M^2) - qM\}} \exp\left(\frac{(k+q)L(i\omega)}{a_o(1-M^2)}\right)\right) \exp\left(\frac{-qL(i\omega)}{a_o(1-M^2)}\right)} \quad (124)$$

$$B_u = \hat{u}' * \frac{\frac{q\{(1-M^2) + kM\}}{k\{(1-M^2) - qM\}}}{\left\{1 + \frac{q\{(1-M^2) + kM\}}{k\{(1-M^2) - qM\}} \exp \frac{(k+q) L(i\omega)}{a_0(1-M^2)}\right\} \exp\left(\frac{-qL(i\omega)}{a_0(1-M^2)}\right)} \quad (125)$$

Kontrolle

Indien geen wrijving dan is: $\xi = 0$, dus

$$r_1 = \eta \text{ en } r_2 = 1$$

$$a_1 = \eta^2 - 1$$

$$a_2 = 2\eta$$

$$z_1 = \left((\eta^2-1)^2 + (2\eta)^2\right)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}\arctg \frac{2\eta}{\eta^2-1}\right)$$

$$z_2 = \left((\eta^2-1)^2 + (2\eta)^2\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{1}{2}\arctg \frac{2\eta}{\eta^2-1}\right)$$

z_1 is de positieve wortel van (a_1+ia_2) , dus dus

$$z = + \sqrt{(\eta+i)^2}$$

$$z_1 = \eta ; z_2 = 1$$

Nu is:

$$k = \frac{(z+Mr)}{\eta+i} \quad (\text{app. 2: (76)})$$

$$q = \frac{(z-Mr)}{\eta+i} \quad (\text{app. 2: (77)})$$

zodat $k = 1 + M$ en $q = 1 - M$

dan is:

$$A_u = B_u \text{ (volgt uit (121))}$$

en

$$A_u = \hat{u}' * \frac{1}{\left\{1 + \frac{(1-M)\{(1-M^2) + (1+M)M\}}{(1+M)\{(1-M^2) - (1-M)M\}} \exp \frac{2Li\omega}{a_0(1-M^2)}\right\} \exp \frac{-(1-M)Li\omega}{a_0(1-M^2)}}$$

$$A_u = \hat{u}' * \frac{1}{\left(\exp \frac{-Li\omega}{a_o(1+M)} + \exp \frac{\{2 - (1-M)\}Li\omega}{a_o(1-M^2)}\right)}$$

of

$$A_u = \hat{u}' * \frac{1}{\exp \frac{-Li\omega}{a_o(1+M)} + \exp \frac{Li\omega}{a_o(1-M)}}$$

dit is identiek aan (83b)

Uit (109) en (110) volgt:

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{u}'} = \frac{\rho_o a_o \left[A_u \frac{q}{(1-M^2) - Mq} \exp \frac{-qLi\omega}{a_o(1-M^2)} - B_u \frac{k}{(1-M^2) + kM} \exp \frac{kLi\omega}{a_o(1-M^2)} \right]}{A_u \exp \frac{-qLi\omega}{a_o(1-M^2)} + B_u \exp \left(\frac{kLi\omega}{a_o(1-M^2)} \right)} \quad (126)$$

of:

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{u}'} = \frac{\rho_o a_o [A_u Q' \exp Q'' Li\omega - B_u K' \exp K'' Li\omega]}{A_u \exp Q'' Li\omega + B_u \exp K'' Li\omega} \quad (127)$$

Nu is

$$B_u = \frac{q\{(1-M^2) + kM\}}{k\{(1-M^2) - qM\}} A_u \quad (121)$$

dus

$$B_u = K^\circ A_u \quad (128)$$

dus

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{u}'} = \frac{\rho_o a_o [A_u Q' \exp(Q'' Li\omega) - K^\circ K' A_u \exp(K'' Li\omega)]}{A_u (\exp(Q'' Li\omega)) + K^\circ A_u \exp K'' Li\omega} \quad (129)$$

waarbij

$$\begin{aligned} Q' &= Q'_1 + i Q'_2 & K' &= K'_1 + i K'_2 \\ Q'' &= Q''_1 + i Q''_2 & K'' &= K''_1 + i K''_2 \\ & & K^\circ &= K^\circ_1 + i K^\circ_2 \end{aligned}$$

dus:

$$Q' = \frac{q}{(1-M^2) - Mq} = \frac{q_1(1-M^2 - Mq_1) - Mq_2^2 + i(q_2 - q_2 M^2)}{(1-M^2 - Mq_1)^2 + (Mq_2)^2} \quad (130)$$

$$Q'' = \frac{-q}{a_o(1-M^2)} = \frac{-(q_1+iq_2)}{a_o(1-M^2)} \quad (131)$$

$$K' = \frac{k}{(1-M^2) + kM} = \frac{k_1(1-M^2+k_1M) + k_2^2M + ((1-M^2)k_2) i}{(1-M^2+k_1M)^2 + k_2^2M^2} \quad (132)$$

$$K'' = \frac{k}{a_o(1-M^2)} = \frac{k_1 + ik_2}{a_o(1-M^2)} \quad (133)$$

$$K^o = \frac{q(1-M^2) + kM}{k((1-M^2) - qM)} \quad (134)$$

Uiteindelijk is:

$$\frac{\hat{p}'}{\hat{u}'} = S_1 + i S_2 \quad (135)$$

De bepaling van S_1 en S_2 is evenwel zo tijdrovend dat een numerieke oplossing van het stelsel vergelijkingen (zoals in par. 2.1.1 gegeven, hier meer voor de hand ligt.

Evenals in par. 2.1.2, 2.2.1 en 2.3.1 volgt een uitdrukking voor F'_w als functie van Q

$$F'_w = -\hat{p}' A_c \quad \text{en} \quad Q' = \hat{u}' A_c$$

$$\rightarrow F'_w = \frac{-\hat{p}'}{\hat{u}'} Q'$$

$$F'_w = -(S_1 + i S_2) Q' \quad (136)$$

Dit kan weer in (4) worden ingevuld:

$$\frac{F'_w}{-(S_1 + i S_2)} + \frac{\mu \delta_o L_c}{\rho_o A_c} \sqrt{\left(\frac{1}{2g\Delta H_o}\right)} = (\mu L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} - i A_c \omega) \hat{y}$$

Hieruit volgt

$$F'_w = (S_3 + i S_4) \hat{y} \quad (137)$$

Zijn S_3 en S_4 bekend dan is een uitdrukking voor ω_{kr} in principe mogelijk.

2.5 Procedure Thomann

2.5.1 Principes

Uitgaande van de volgende vooronderstellingen:

- 1) Het medium is een ideaal niet-viskeus gas.
- 2) De pijpdiameter is veel kleiner dan de pijplengte.
- 3) De fluctuaties van de druk (p'), de dichtheid (ρ') en de snelheid u' zijn veel kleiner dan de "stationaire" waarden p_0 , ρ_0 en geluidssnelheid a_0 .
- 4) De wandwrijving is verwaarloosd.

Zijn de basisvergelijkingen voor "pijpstroming"

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$p' = a_0^2 \rho' \quad (3)$$

die uitmonden in de volgende oplossing voor de vloeistofbeweging in de pijp:

$$u' = A \exp \omega_0 z \left(t + \frac{x}{a_0(1-M)} \right) + B \exp \omega_0 z \left(t - \frac{x}{a_0(1+M)} \right) \quad (4)$$

$$p' = \rho_0 a_0 \left[-A \exp \omega_0 z \left(t + \frac{x}{a_0(1-M)} \right) + B \exp \omega_0 z \left(t - \frac{x}{a_0(1+M)} \right) \right] \quad (5)$$

waarin:

- M = u_0/a_0 (Machgetal)
- z = $\alpha/\omega_0 + i\omega/\omega_0$
- ω = frekwentie van de (harmonische) beweging
- ω_0 = eigenfrekwentie
- $\alpha > 0$ = opslingeringscoëfficiënt
- $\alpha < 0$ = dempingscoëfficiënt

Met randvoorwaarden $p' = 0$ op $x = 0$ volgt $A = B$ en

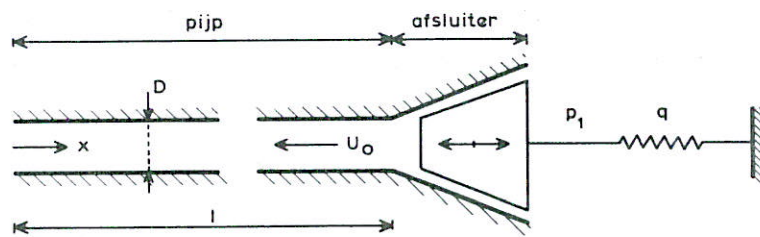
$$u'(x,t) = \frac{-p'(x,t)}{\rho_0 a_0} \coth \left(\frac{\omega_0 x}{a_0(1-M^2)} z \right) \quad (7)$$

deze oplossing is nagenoeg identiek met die uit par. 2.3.1 formule (84). Wordt

voor z ($z = \alpha/\omega_0 + i\omega/\omega_0$) alleen het imaginaire deel genomen, dan zijn deze uitdrukkingen identiek.

De schuifbeweging wordt beschreven door:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -q x' + \frac{\partial F}{\partial p} p' \quad (8)$$



Figuur 2.2

De variatie in de stroomsnelheid ter plaatse van het einde van de afsluiter (fig. 2.2).

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial p} p' + \frac{\partial u}{\partial \dot{x}} \dot{x}' \quad (9)$$

$$\dot{x}' = \frac{dx}{dt}$$

In het geval van een veronderstelde harmonische pijpstroming geldt:

$$x' = \hat{x} \exp \omega_0 z t \quad (10)$$

$$p' = \hat{p} \exp \omega_0 z t \quad (11)$$

Een combinatie van (8) tot en met (11) levert voor de uitstroming op het schuifeinde ($x = l$)

$$x' = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{q(1+z^2)} p' \quad (12)$$

$$u' = p' \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p}}{q} \frac{1}{1+z^2} + \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\frac{\partial u}{\partial \dot{x}} \frac{\partial F}{\partial p} \omega_0}{q} \frac{z}{1+z^2} \right] \quad (13)$$

Een combinatie op $x = l$ van de formules voor de pijpstroming en schuifbeweging

(7) en (13) op $x = 1$ levert (fig. 2.3):

$$A_T \frac{1}{1+z^3} + B_T + C_T \frac{z}{1+z^2} = -\coth(1z) \quad (14)$$

waarin:

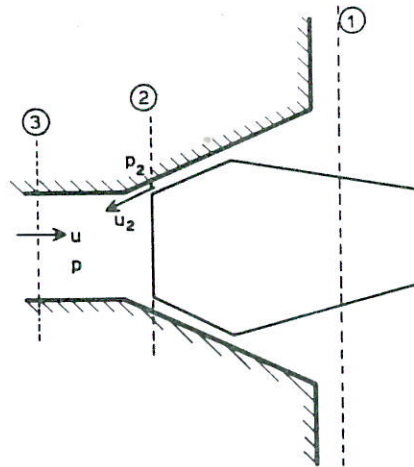
$$A_T = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} \rho_o a_o}{q} \quad (14a)$$

$$B_T = \frac{\frac{\partial u}{\partial p} \rho_o a_o}{q} \quad (14b)$$

$$C_T = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} \omega_o \rho_o a_o}{q} \quad (14c)$$

$$L_T = \frac{\omega_o l}{a_o (1-M^2)} \quad (14c)$$

$$z = \alpha/\omega_o + i\omega/\omega_o$$



figuur 2.3

Voor het geval van een afsluiter als in fig. 2.2 en 2.3 heeft Thomann benaderingen voor de waarden van $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial F}{\partial p}$ opgesteld uitgaande van de volgende vooronderstellingen:

1. Wrijving verwaarloosbaar.
2. Frekwentie van de oscillaties in de pijp is zo laag dat de stroming als kwasi-stationair wordt beschouwd.
3. Uniforme drukverdeling over de afsluiterbasis bij een vast loslaat punt.
4. Stroming van (1) naar (3) is niet kompressiebel kwasi-stationair.

Bij een kwasi-stationaire stroming met vast loslaatpunt blijken A_T , B_T en C_T reëel te zijn.

Daarom is vergelijking (14) als volgt op te delen in een reëel en een imaginair deel.

Het reële deel:

$$A_T (1+\xi^2-\eta^2)/r + B_T + C_T \xi (1+\xi^2+\eta^2)/r = - [1+\cotg^2(L_T \eta)] s^{-1} \operatorname{tgh}(L_T \xi) \quad (15)$$

Het imaginaire deel:

$$-2 A_T \xi \eta / r + C_T \eta (1-\xi^2-\eta^2) / r = [1-\operatorname{tgh}^2(L_T \xi)] s^{-1} \cotg(L_T \eta) \quad (16)$$

$$\xi = \alpha / \omega_o$$

$$\eta = \omega / \omega_o$$

$$r = (1-\xi^2\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2$$

$$s = 1 + \operatorname{tgh}^2(L_T \xi) \cotg^2(L_T \eta)$$

2.5.2 Stabiliteitskriteria

Een stabiliteitsgrens is bereikt indien $\xi = 0$ (geen opslingering, geen demping). Uit (15) volgt dan:

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{A_T}{B_T} + 1 \right)} \quad (17)$$

en (17) in (16) geeft

$$\frac{-A_T}{B_T C_T \sqrt{\left(1 + \frac{A_T}{B_T}\right)}} = \operatorname{tg}\left(L \sqrt{\left(1 + \frac{A_T}{B_T}\right)}\right) \quad (18)$$

Indien

$$Y_T = \frac{-A_T}{B_T C_T \sqrt{\left(1 + \frac{A_T}{B_T}\right)}} \quad (19)$$

en

$$X_T = L_T \sqrt{1 + \frac{A_T}{B_T}} \quad (20)$$

dan is een presentatie als van fig. 2.4 mogelijk, waarin de stabiliteitsgrenzen

$$Y_T = \operatorname{tg} X_T \quad (21)$$

zijn aangegeven.

De andere begrenzing van het stabiele gebied wordt gevormd door

$$L_T = \eta\pi + \Delta L_T$$

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial L} \Delta L_T \quad (22)$$

$$\eta = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial L} \Delta L_T$$

indien $\Delta L_T \rightarrow 0$, dan volgt

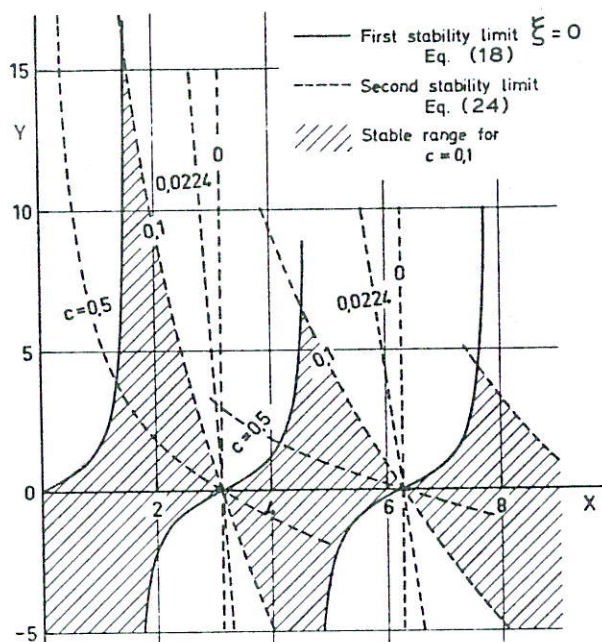
$$L_T = \eta\pi$$

$$\eta = 1 \quad (23)$$

$$\xi = 0$$

Zodat uit combinatie van (23) en (19) en (20) volgt

$$Y_T = \frac{1 - \left(\frac{X_T}{\eta\pi}\right)^2}{C_T \frac{X_T}{\eta\pi}} \quad (24)$$



(uit (7))

Figuur 2.4

Indien een "pijp-schuif"-kombinatie niet valt op een stabiliteitsgrens dan dienen ξ en η bepaald te worden met behulp van (15) en (16). Normaliter is dit alleen numeriek mogelijk. Voor situaties in de nabijheid van de stabiliteitsgrenzen is door Thomann een analytische oplossing aangegeven (waarop hier niet nader wordt ingegaan).

2.5.3 Experimenten van Thomann

Voor een tweetal afsluiterposities zijn door Thomann een aantal experimenten verricht.

Van de diverse proefseries (runs 1 t/m 3) zijn in tabel 1 de uiterste grenzen aangegeven.

Figuur 2.5 geeft de lokatie van alle afzonderlijke proeven in het stabiliteitsdiagram.

Uit de fig. 2.6 en 2.7 zijn de waarden van X_T en Y_T af te lezen. Gekombineerd met de waarden van A_T en B_T , die volgen uit tabel 1 kan dan L_T worden bepaald volgens:

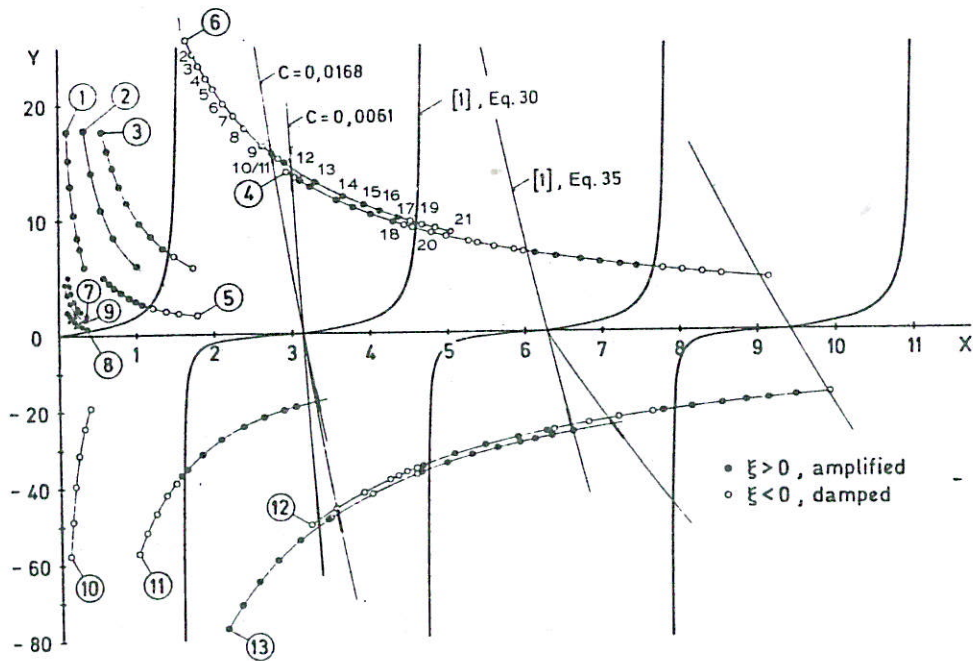
$$L_T = X_T / \sqrt{1 + \frac{A_T}{B_T}} \quad (25)$$

Uit (14d) volgt:

$$\omega_o = \frac{L_T}{l} a_o (1-M^2)$$

Omdat $\omega_o = \sqrt{(q/m)}$ is het mogelijk de door Thomann gebruikte massa te berekenen: $m = q/\omega_o^2$

Met behulp van het bovenstaande was het mogelijk tabel 2 samen te stellen. Tabel 2 bevat nu alle gegevens die een controleberekening mogelijk maken. Wel is de nauwkeurigheid niet al te groot omdat diverse waarden zijn bepaald met behulp van in grafieken afgelezen waarden (zie par. 4.1).



Location of the experiments in the stability diagram.

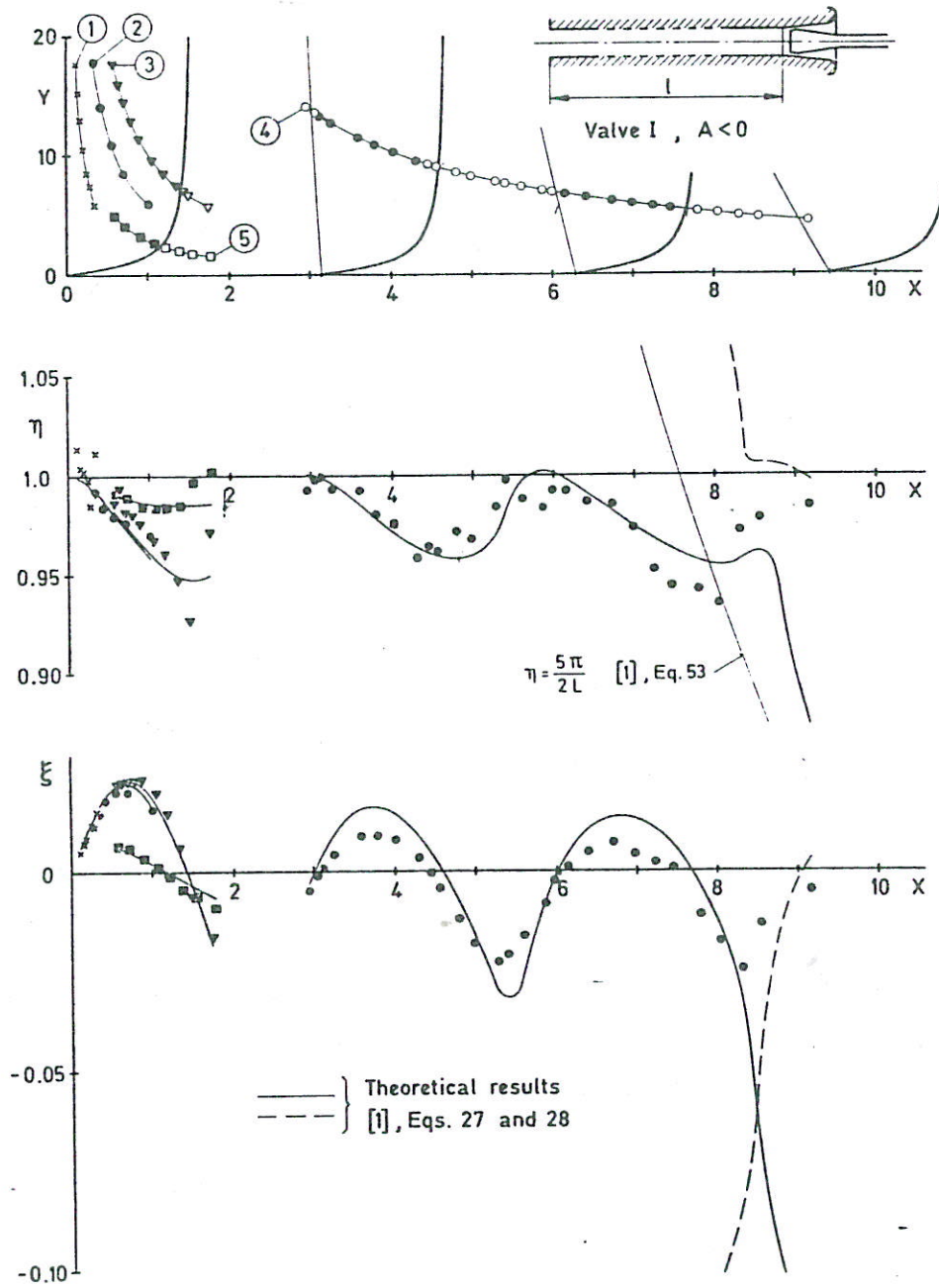
$$X = L\sqrt{1 + A/B} \sim \text{pipe length,}$$

$$Y = -A/BC\sqrt{1 + A/B} \sim \text{pressure drop over the valve,}$$

$$XY = \text{const. if only valve mass } m \text{ is changed.}$$

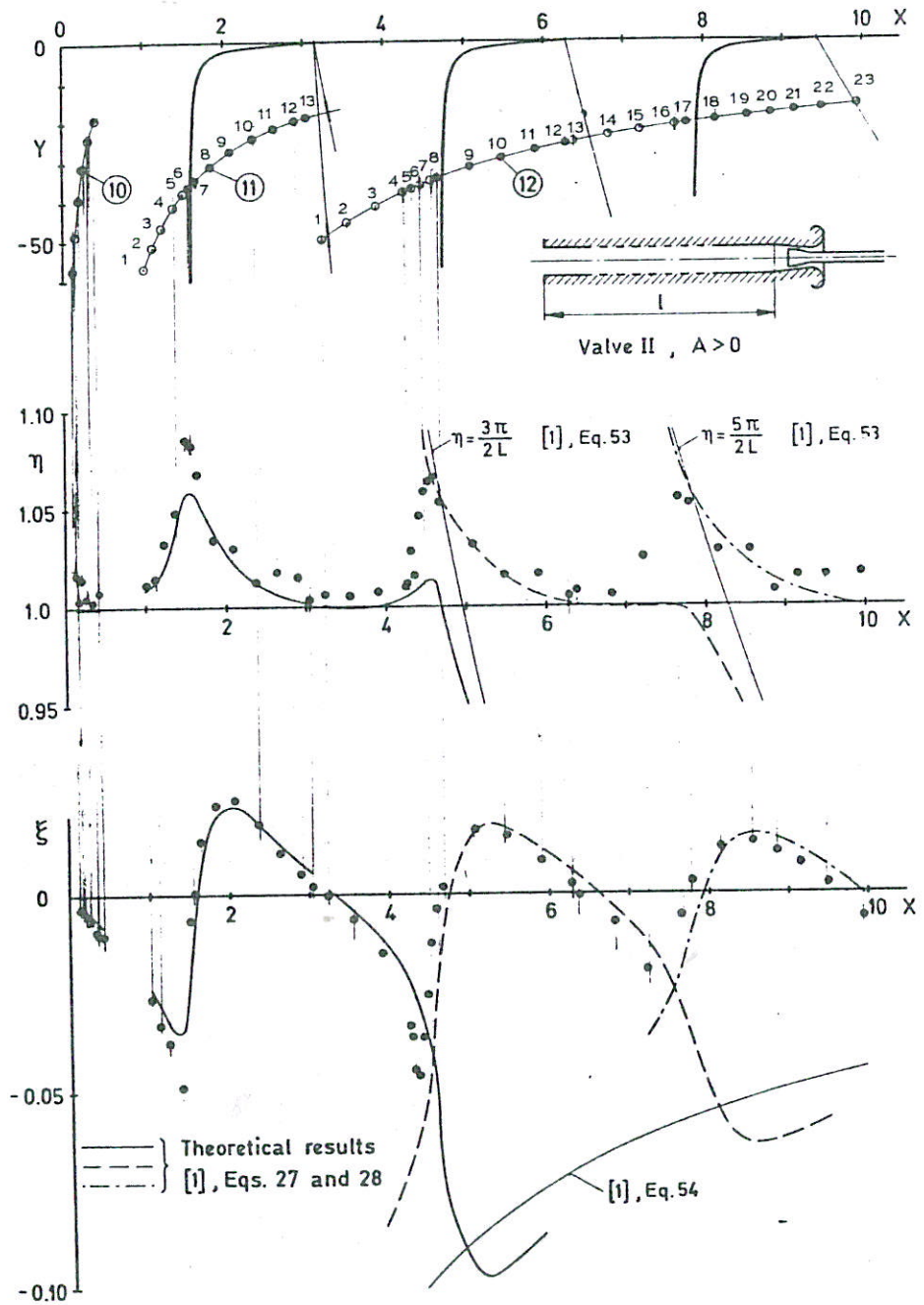
The encircled numbers refer to the runs, see Table 1.

Figuur 2.5



Comparison of amplification ξ and frequency η with theory [] for Valve I. Amplitude $\sim \exp \omega_0(\xi + i\eta)t$, $q = 5560 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Figuur 2.6



Amplification and frequency for Valve II, $q = 5560 \text{ N/m}$.

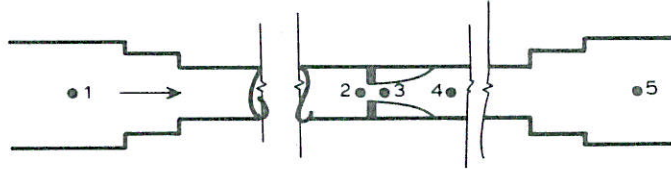
Figuur 2.7

2.6 Procedure Weaver

2.6.1 Principe

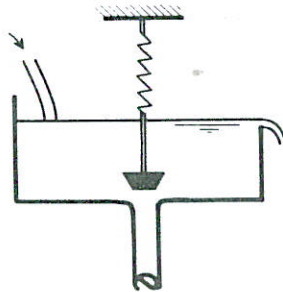
Weaver en Ziada hebben een theoretisch model opgezet voor zelfexciterende trillingen bij afsluiters met kleine openingen [3]. De afsluiter is opgevat

als een "orifice" met een in de tijd variërende doostroomopening (zie figuur 2.8).



Figuur 2.8

In een latere publikatie [8] is het model enigszins aangepast en geschikt gemaakt voor een "typische" badstop-situatie (fig. 2.9).



Figuur 2.9

Voor een turbulente, niet-kompressiebele vloeistof geldt tussen twee punten i en j van een leiding:

$$\frac{P_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{P_j}{\rho g} + \frac{v_j^2}{2g} + \Delta h_{ij} + I_{ij} \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

$$I_{ij} = L_{ij}/g A_{ij} \quad (2)$$

I_{ij} = traagheid vloeistof tussen i en j

L_{ij} = lengte pijp tussen i en j (met konstante doorsnede)

A_{ij} = konstante oppervlakte doorsnede pijp
 Δh_{ij} = energieverlies

Hieruit valt na enig bewerking af te leiden dat:

$$Q = C_d A_o \left[1 - \left(\frac{C_c A_o}{A_2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2g\Delta H - \frac{1}{A_2^2} \left[\psi - \left(\frac{A_2}{C_c A_o} \right)^2 \right] Q^2 - \frac{2}{A_2} \left(L_{eq} - \frac{A_2 L_o}{C_c A_o} \right) \frac{dQ}{dt} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Als referentiedoorsnede is doorsnede A_2 onmiddellijk bovenstrooms van de orifice gebruikt

$$A_2 v_2 = Q = C_c \cdot A_o v_3 \quad (4)$$

terwijl:

A_o = doorsnede orifice
 C_c = kontraktiecoëfficiënt
 C_d = afvoercoëfficiënt
 ΔH = energieverlies over het systeem
 ψ = $A_2^2 \sum \xi_{ij} / A_{ij}^2 + 1$ (totale verliescoëfficiënt)
 ξ_{ij} = verliescoëfficiënt over traject ij
 L_{eq} = ekwivalente lengte van het totale systeem
 $= A_2 \sum L_{ij} / A_{ij}$
 L_o = lengte van de straal met doorsnede $C_c A_o$ (meestal verwaarloosbaar ten opzichte van L_{eq})

De schuif wordt voorgesteld door middel van een één-massa-veersysteem waarvoor geldt:

$$M \frac{dx^2}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k(x-x_o) + F = 0 \quad (5)$$

M = totale effectieve massa inclusief toegevoegde massa
 c = totale demping (inclusief die van de vloeistof)
 k = veerconstante
 x_o = initiële opening
 F = dynamische belasting door het water op de schuif

$$F = \int_s \Delta p \, ds \quad (6)$$

s = schuifoppervlak

Indien onderscheid wordt gemaakt tussen het debiet inclusief het "piston"-effekt (Q_p) en het debiet door de schuif (= debiet door de orifice) Q_v dan geldt:

$$Q_p = Q_v - A_v \dot{x} \quad (7)$$

A_v = oppervlakte schuif

Het drukverlies tot onmiddellijk benedenstrooms van de schuif bedraagt:

$$\Delta h_{34} = \frac{Q_p^2}{2gA_4^2} + \frac{Q_v^2}{2g} \left(\frac{1}{A_3^2} - \frac{2}{A_3A_4} \right) - \frac{\dot{x} A_v}{g A_4} \quad (8)$$

voor A_3 geldt:

$$A_3 = C_c w x \quad (9)$$

w = schuifopening

Wordt rekening gehouden met het piston-effekt en met heersende druk onmiddellijk benedenstrooms van de schuif (dus met de terugwinning van energie daar ter plaatse), dan is de volgende dimensieloze presentatie mogelijk:

$$\bar{Q}_v = \frac{C_D \bar{x}}{\left[\eta^2 - \frac{C_c^2 \bar{x}^2}{\theta^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \Delta \bar{P}_v - \frac{2\varepsilon \bar{Q}_v}{c_v \theta^2} \frac{d\bar{x}}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta^2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

waarin:

$$\Delta \bar{P}_v = \Delta \bar{P} - \left(\psi + 1 + \frac{1}{\theta^2} \right) \bar{Q}_p^2 + \frac{2\eta}{C_o \bar{x}} \bar{Q}_v^2 + 2\varepsilon \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 - \alpha \frac{d\bar{Q}_v}{d\tau} - \frac{\eta \alpha_o}{C_c \bar{x}} \frac{d\bar{Q}_v}{d\tau} + \varepsilon \alpha \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} \quad (11)$$

waarin:

\bar{x} = x/d (maat voor verplaatsing)

d = karakteristieke schuifafmeting

η = A_u/w_d (maat voor benedenstroomse pijpdoorsnede)

$$\begin{aligned} \theta &= A_2/A_4 \text{ (maat voor bovenstroomse pijpdoorsnede)} \\ \varepsilon &= A_v/A_u \text{ (maat voor schuifoppervlak)} \\ \bar{Q}_v &= Q_v/(A_4 \omega d) \text{ (referentie frekwentie)} \\ \omega &= \sqrt{k_r/M} \text{ (referentie veerstijfheid)} \\ \tau &= \omega t \text{ (maat voor de tijd)} \\ \Delta \bar{P} &= 2\Delta P/(\rho(\omega d)^2) \text{ (maat voor totale drukverschil)} \\ \bar{Q}_p &= Q_p/A\omega d \text{ (maat voor het debiet)} \\ \alpha &= 2L_{eq}/d \text{ (maat voor de traagheid)} \\ \alpha_o &= 2L_o/d \end{aligned}$$

N.B.: Als referentiedoorsnede geldt voor deze situatie: de benedenstroomse A_4 .

De dimensieloze bewegingsvergelijking van de afsluiter luidt:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + 2\xi \frac{d\bar{x}}{d\tau} + \bar{k}(\bar{x}-\beta) + \frac{1}{2}\mu \Delta \bar{P}_v = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \xi &= c/(2M\omega) \text{ maat voor de demping} \\ \bar{k} &= k/k_r \text{ maat voor de veerstijfheid} \\ \beta &= x_o/d \text{ maat voor initiële opening} \\ \mu &= \rho A_v d/M \text{ maat voor de massa "meebewegend water"} \end{aligned}$$

Het dynamisch gedrag van het systeem wordt beschreven door (10) en (12). Oplossingen zijn mogelijk door middel van numerieke integratie.

2.6.2 Stabiliteitskriterium

Een eenvoudige uitdrukking is alleen mogelijk indien de traagheid van de vloeistof groot is, als $\alpha \rightarrow \infty$.

Het systeem is dan volgens Weaver stabiel indien

$$\bar{k} > \frac{\mu \bar{q}^2 \eta^2}{\bar{x}_{eq}^3 C_D^2} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{eq} &= x/d \text{ voor de neutrale, stabiele evenwichtspositie} \\ \bar{q} &= \text{bijbehorend dimensieloos debiet door de schuif bij de gegeven} \\ &\quad \text{steemparameters} \end{aligned}$$

Als bovenstrooms leidingoppervlak groot is, ($\theta \rightarrow \sim$) is $\bar{x}_{eq} = 2/3 x/d = 2/3 \beta$ dan wordt

$$\bar{k} > \frac{27\mu \Delta\bar{P} \eta^2}{8C_D^2 \beta^3 \left(\psi + 1 + \frac{9\eta^2}{4C_D^2 \beta^3} - \frac{3\eta}{C_c \beta} \right)} \quad (14)$$

Deze uitdrukking is vooralsnog niet te controleren. Voor situaties met geringe vloeistoftraagheid of met stralen door de afsluiter, waarvan de vloeistoftraagheid relatief groot is, is een dergelijk stabiliteitskriterium niet een voudig op te zetten.

Dit lijkt voorlopig niet op

$$k > \frac{2g\Delta H A_v}{x_o} \left(\frac{m}{\rho AL} + 1 \right)$$

of als L groot is, op

$$k > \frac{2\rho g\Delta H A_v}{x_o}$$

3. Globale vergelijkingen van de diverse methodieken

3.1 Uitgangspunten en beperkingen

Aan de hand van onderstaand overzicht zijn de diverse uitgangspunten en beperkingen van de verschillende methodieken met elkaar te vergelijken.

De meest complete beschrijving van zelfexciterende schuifbewegingen is mogelijk volgens de methode "Weaver".

Het grote voordeel van de methode Weaver ten opzichte van de overige methodieken is dat ook "grotere" niet-harmonische bewegingen beschreven kunnen worden. Bij de overige methodes is steeds aangenomen dat verplaatsingen en debietvariaties erg klein zijn ten opzichte van de "basis"positie c.q. het debiet. Weaver is bovendien in staat de afvoercoëfficiënt als functie bijvoorbeeld van de opening mee te nemen.

De beperking van de methode van Weaver is gelegen in het feit dat deze (althans in de huidige vorm) de vloeistof als niet-kompressiebel beschrijft.

De methode van Thomann en de WL-II-methode vertonen zeer grote overeenkomst. Het stabiliteitsdiagram behorend bij WL-II is eenvoudiger dan dat van Thomann (vergelijk fig. 1 met 2.4), maar heeft als "nadeel" dat de ω_{kr} impliciet in de vergelijking is opgenomen.

Voor harmonische bewegingen is methode WL-III duidelijk de meest omvattende (ook wandwrijving kan worden verdiskonteerd).

Een analytische oplossing is evenwel ondoenlijk, zodat voor de oplossing van deze problematiek alleen numerieke berekeningen in aanmerking komen.

	oorspronkel.		WL-aanpak		Thomann	Weaver
	WL-aanpak Ia	le uitbreiding Ib	2e uitbreiding II	3e compleet III		
medium	niet-kompressiebel		kompressiebel	kompressiebel	kompressiebel	kompressiebel
beschrijving	gelineariseerd		gelineariseerd	gelineariseerd	gelineariseerd	niet-lineair
verplaatsing	$y' \ll \delta_0$		$y' \ll \delta_0$	$y' \ll \delta_0$	$y' \ll \delta_0$	geen voorwaarden
afvoercoëff.	konstant		konstant	konstant	konstant	niet konstant
energieverlies	spreiding na de schuif zonder verlies		idem I	idem I	idem I	mèt terugwinnen druk!
wandwrijving	= 0	≠ 0	= 0	≠ 0	= 0	≠ 0
stabiliteits- kriterium	ja	ja	ja	*)	ja	ja
stabiliteits- diagram	ja	ja	ja	*)	ja	ja
werkwijze	bepaling harmische beweging ω_0 kontrole optredende ω		idem I	alleen numerieke "real time" berekeningen zinnvol	a) bepaling stabili- teitsparameters b) of numerieke be- rekening van op- slingering en frekwentie	a) bepaling stabili- teitsparameters b) numerieke bereke- ning van 2 gekop- pelde niet-lin. vergelijkingen in y en Q
kontrole	alleen via stab.krite- rium met proeven Weaver (inkl. damping)		modelresultaten		via modelresultaten	via modelresultaten

*) Alleen numerieke berekening zinvol (nog niet uitgevoerd)

Overzicht Diverse methodieken.

3.2 Geschiktheid van diverse methodieken

WL-methodes Ia en Ib:

In geval van korte en lange leiding met en zonder wrijving, en duidelijk harmonische (al dan niet gedempte) bewegingen; controle van $\omega \gtrless \omega_{kr}$ is dan mogelijk:

Ia zonder wrijving:

$$\omega_{kr}^2 = \frac{k}{m} = \frac{2\rho g \Delta H A}{m \delta_o} \left(\frac{m}{\rho A L} + 1 \right) \quad (1)$$

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H}{\delta_o L} + \frac{2\rho g \Delta H A}{m \delta_o} \quad (2)$$

Indien L zeer klein:

$$\omega_{kr}^2 \approx \frac{2g\Delta H}{\delta_o L} \left(1 + \frac{\rho A L}{m} \right) \approx \frac{2g\Delta H}{\delta_o L} \quad (3)$$

Indien L zeer groot:

$$\omega_{kr}^2 \approx \frac{2\rho g \Delta H A}{\delta_o m} \quad (4)$$

Ib met wrijving:

$$\omega_{kr}^2 = \frac{2g\Delta H_o}{\delta_o L} (1-\epsilon)$$

waar:

$$\epsilon = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{s}\right)}$$

WL-methode II:

Als methode I, indien de "vloeistof" kompressiebel is (N.B.: ook de snelheid van de stationaire beweging is van belang).

De ω_{kr} kan worden bepaald volgens:

$$Y = \frac{\omega^2 \delta_o L}{2g\Delta H} \quad (5)$$

$$X = \frac{\omega L}{a} = L \sqrt{\left(\frac{\omega_{kr}^2 \rho_0}{E}\right)} \quad (6)$$

terwijl nu voor ω_{kr} geldt dat:

$$Y = X/\text{tg}(X/(1-M^2)) \quad (7)$$

Deze relatie is weergegeven in fig. 1, waar ook is aangeduid in welk bereik de bewegingen stabiel resp. instabiel zullen zijn.

De methode van Thomann is gelijkwaardig aan WL-II.

De WL-III opzet is alleen zinvol in geval van een numerieke berekening. Hiertoe dient een rekenschema te worden opgezet. De toepassing blijft beperkt tot lineaire verschijnselen (bewegingen die klein zijn ten opzichte van de oorspronkelijke verplaatsing).

Is het verschijnsel duidelijk niet lineair, dan biedt voorlopig alleen Weaver uitkomst, met dien verstande dat de kompressiebiliteit verwaarloosbaar moet zijn (is dit niet het geval dan dienen zijn basis vergelijkingen te worden aangepast.)

Wel is de wrijvingsinvloed te verdisconteren.

4. Experimentele gegevens

4.0 Algemeen

Een handicap voor de bij het WL ontwikkelde methodieken was lange tijd het ontbreken van resultaten van modelonderzoek, waarmee vergelijkingen mogelijk waren. Een dergelijk trillingsonderzoek is namelijk erg kostbaar. Ook in de literatuur zijn maar weinig geschikte experimentele gegevens gepubliceerd.

De modelonderzoekresultaten van Thomann [7] zijn na vele rekenkundige bewerkingen voor een eerste verificatieberekening te gebruiken.

Uit de door Thomann gegeven grafieken (fig. 2.5, 2.6 en 2.7) zijn een aantal parameters "teruggerekend" (zie tabel 2). Via de "WL-II-methode" is uit deze parameters de ω_{kr} berekend. Ook zijn de resultaten van Thomann (omgerekend) weergegeven in het stabiliteitsdiagram van fig. 2.

4.1 Kontroleberekeningen voor Thomanns resultaten

a. Voor het stabiliteitsdiagram

Uit tabel 2 zijn de A_T en B_T samen met de X_T uit de fig. 2.5, 2.6 en 2.7 gebruikt voor de bepaling van L_T volgens (20) uit par. 2.5.2.

$$L_T = X_T / \sqrt{1 + A_T/B_T} \quad (1)$$

Uit (14d) van par. 2.5.2 volgt:

$$\omega_o = L_T a_o (1-M^2)/1 \quad (2)$$

ω volgt uit de in de figuren aangegeven η volgens

$$\omega = \eta \omega_o \quad (3)$$

m kon worden bepaald uit

$$m = \frac{q}{\omega_o^2} \quad (4)$$

q = veerconstante

Uit deze parameters zijn bepaald

$$X = L \frac{\omega}{a_0} \quad (5)$$

$$Y = \frac{\omega^2 \delta_0 L}{2g\Delta H_0} \quad (6)$$

De punten (X, Y) zijn vervolgens uitgezet in het stabiliteitsdiagram van fig. 2.

Uit de vergelijking van fig. 2 met fig. 2.5 t/m 2.7 en tabel 2 blijken de berekende waarden volgens WL-II goed te korresponderen met de proefresultaten. De ω_{kr} is in tabel 2 die ω , waarvoor de ξ - (of de α -) waarde in een bepaalde run van teken wisselt.

N.B.: De enige parameter die in één run wijzigt is de m (waardoor uiteraard ook $\eta = \omega/\omega_0$ en $\xi = \alpha/\omega_0$ veranderen).

b) Rechtstreekse berekening uitgaande van Thomanns experimenten

De ω_{kr} wordt bepaald met behulp van verg. (98)

$$\text{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_0 (1-M^2)} = \frac{2g\Delta H_0}{a_0 \delta_0 \omega_{kr}} \quad (7)$$

Nu is de geometrie van Thomann niet identiek aan die van paragraaf 2.1-2.3.

In geval van Thomanns experimenten luidt formule (2)

$$Q = \mu A_g \sqrt{(2g\Delta H)} \quad (8)$$

waarbij:

$$A_g = a_1 \delta^2 + b_1 \delta + c_1$$

De afleiding hiervan en waarden van a_1 , b_1 en c_1 zijn in appendix 3 gegeven.

Formule (4) uit par. 2.5.2 luidt nu:

$$Q' = \frac{\partial Q}{\partial \delta} y + \frac{\partial Q}{\partial \Delta H} \Delta H' - A_c \dot{y} \quad (9)$$

$$Q' = \mu \left(\frac{\partial A_g}{\partial \delta_o} \right) y \sqrt{(2g\Delta H_o)} + \frac{1}{2} \mu A_{g_o} \Delta H' \sqrt{\left(\frac{2g}{\Delta H_o} \right)} - A_c \dot{y} \quad (10)$$

N.B. y is een kleine verplaatsing in x (of δ) richting.

Daardoor wijzigt (87) in

$$F'_w = \frac{1}{i\rho_o a_o \operatorname{tg} \frac{\omega L}{a_o(1-M^2)}} + \frac{\mu A_g}{\rho_o A_c} \sqrt{\left(\frac{1}{2g\Delta H_o} \right)} = \left(\mu \frac{dA_g}{d\delta} \sqrt{(2g\Delta H_o)} - i\omega A_c \right) \hat{y} \quad (11)$$

of

$$F'_w = \frac{1}{i\rho_o a_o \gamma} + C_1^* = (C_2^* - i\omega A_c) \hat{y} \quad (12)$$

Voor de stabiliteitsgrens in de ongedempte situatie van Thomann geldt:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o(1-M^2)} = \frac{C_2^*}{A_c C_1^* \omega_{kr} \rho_o a_o} \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o(1-M^2)} = \frac{\left(\frac{dA_g}{d\delta} \right) 2g\Delta H_o}{A_{g_o} \omega_{kr} a_o} \quad (14)$$

Uit de appendix 3 blijkt dat

$$A_g = (a_1 \delta^2 + b_1 \delta + c_1)$$

Zodat

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_{kr} L}{a_o(1-M^2)} = \frac{(2a_1 \delta_o + b_1) 2g\Delta H_o}{(a_1 \delta_o^2 + b_1 \delta_o + c_1) \omega_{kr} a_o} \quad (15)$$

Voor $2g\Delta H = u_{20}^2$ zijn in tabel 3 voor de verschillende runs de ω_{kr} bepaald.

(Voor u_{20} zie fig. 2.3.)

De ω_{kr} -berekening is uitgevoerd met een bestaand rekenprogramma voor nulpuntsbepaling van impliciete functies.

De uitkomsten vertonen redelijke overeenkomst met de experimentele waarden. Wel dient men zich te realiseren dat vanuit de grafieken de ω_{kr} van Thomann is "teruggerekend".

4.2 Kontrole berekeningen met gegevens van Weaver

De gegevens van Weaver zijn met de huidige WL-methodes niet "zonder meer" na te rekenen omdat bij zijn onderzoekingen ook demping een rol speelt. Is de WL-aanpak ook numeriek door te rekenen dan is controle wellicht mogelijk.

Wel geeft Weaver zelf een vergelijking van diens stabiliteitskriterium berekend volgens (13) en die van Kolkman [9]. Vermoedelijk is voor de laatste uitdrukking gebruikt:

$$k \delta_o = 2\rho g \Delta H A_c \quad (\text{verg. (27b)}) \quad (16)$$

dus:

$$k = \frac{2\rho g \Delta H A_c}{\delta_o} \quad (\text{of } \omega = \sqrt{\left(\frac{2\rho g \Delta H A_c}{\delta_o m}\right)})$$

Een uitdrukking waarin de demping dus niet is verdisconteerd.

Rekening houdend met demping zou dus moeten gelden (34):

$$k = \frac{m (\rho \mu L L_c \sqrt{(2g\Delta H_o)} - c) \sqrt{(2g\Delta H_o)}}{\mu \delta_o L^2 L_c \left(\frac{c \mu \delta_o L_c}{A_c^2 \sqrt{(2g\Delta H_o)}} + \rho \right)} \quad (17)$$

Uit fig. 4.1 volgt voor $\beta = 0,19$: $\bar{k} \approx 2400$

β = dimensieloze opening (onbelast)

\bar{k} = dimensieloze veerconstante

dan is k (= veerconstante) = $\bar{k} k_r = 3000$

Uit fig. 4.2 blijkt dan $\omega/\omega_n = 0,1$.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+m_w}} \quad (18)$$

Dit levert op $\omega_n = \sqrt{\frac{3000}{1,32}} = 47,7$

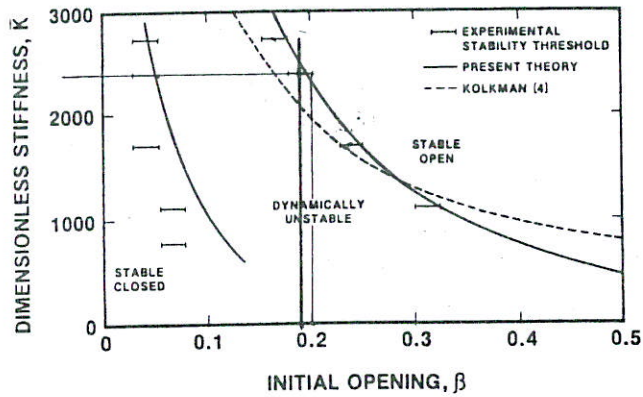
want $m = 1,25$ kg

m_n is de "water"-massa van een bol "rond"

de afsluiter met diameter d_s

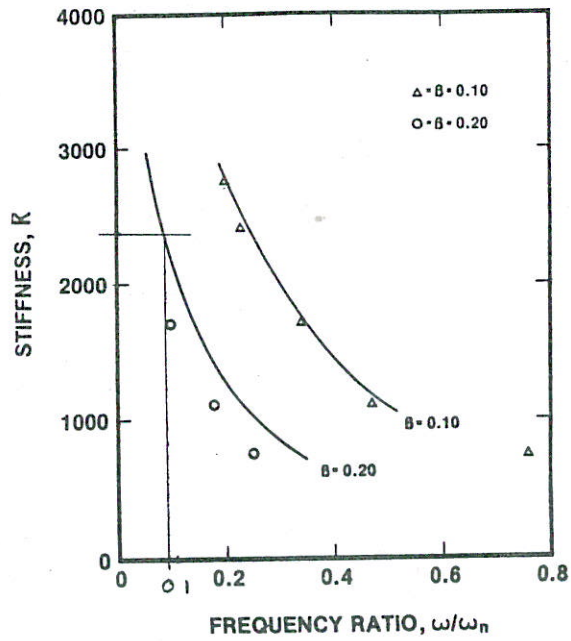
$$m_w = \frac{4}{3} \pi \rho \left(\frac{1}{2} d_s\right)^3 = 0,07 \text{ kg}$$

dus $\omega = 0,1 \omega_n = 4,77$



STABILITY CHART OF PLUG VALVE FOR LARGE FLUID INERTIA, $\alpha = 354$

Figuur 4.1



THE EFFECT OF STIFFNESS, \bar{K} , AND INITIAL OPENING, β , AND LIMIT CYCLE FREQUENCY RATIO, ($\alpha = 354$)

Figuur 4.2

Formule (17) levert op

$$k \approx 40,41$$

en dus

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_t}} = \sqrt{\frac{40,41}{1,32}} = \underline{5,53} \text{ (tegen } 4,77 \text{ bij Weaver)}$$

hierbij is aangenomen dat $\mu = 0,73$

en uit Weavers gegevens afgeleid dat:

$$c = 19,3$$

$$L = 8,99$$

$$L_c = 0,16$$

$$\delta_o = 0,01$$

Er is geen rekening gehouden met de verschillen tussen schuifoppervlak en pijpdoorsnede. Bovendien is ook de geometrie bij Weaver niet identiek aan die van de WL-opzet.

Dit punt is helaas het enige dat globaal nagerekend kan worden.

De (overigens vrij geringe) afwijkingen in fig. 4.1 tussen Weavers en Kolkmans grafiek zijn bij kleine openingen ($\beta < 0,3$) een gevolg van de aanname bij Kolkman dat schuifoppervlak gelijk is aan pijpdoorsnede en van verwaarlozen van terugwinnen van druk na de schuif. Is $\beta > 0,3$ dan is de overwaarding van de van de stijfheid (of de frekventie) een gevolg van het verwaarlozen bij Kolkman van de verliezen in de pijp.

5. Konklusies en aanbevelingen

Met behulp van het overzicht van hoofdstuk 3 is na te gaan welke methodiek voor welke toepassing geschikt is.

Uit het overzicht van hoofdstuk 3 valt af te leiden dat de meest complete beschrijving van zelfexciterende schuifbewegingen mogelijk is met de methode van Weaver. Hier geldt niet de beperking (die bij alle andere besproken methodieken) wel geldt: namelijk dat de verplaatsingen en debietvariaties klein moeten zijn ten opzichte van de basisgrootheden. Bovendien hoeft de beweging zich niet te beperken tot een harmonische. Wel gaat Weaver er vanuit dat de vloeistof niet kompressiebel is.

Zijn de verplaatsingen en de debietvariaties wèl klein, dan biedt de WL-III aanpak goede mogelijkheden (afhankelijk van de mogelijke schematisatie).

In eenvoudiger situaties, zoals

niet-kompressiebel, geen wrijving : Ia

niet-kompressiebel, wèl wrijving : Ib

wel kompressiebel, geen wrijving : II

is een analytische oplossing mogelijk met betrekking tot het stabiliteitsgedrag.

Moeten invloeden als kompressiebiliteit en wandwrijving worden beschreven dan verdient de numerieke oplossing van de basis-(differentiaal)-vergelijkingen (WL-III) verre de voorkeur boven een analytische oplossing.

In dergelijke situaties is ook het bepalen van stabiliteitsindikatoren een zeer moeizame arbeid.

Het blijkt dan ook alleszins zinvol en verantwoord een numeriek-berekenings-schema op te stellen voor zelfexciterende schuiven. Uitgaande van de WL-III of de Weaver aanpak.

LITERATUUR

- 1 Kolkman, P.A.
Flow-induced gate vibrations
Delft Hydraulics Laboratory, Publication No. 164, 1976
- 2 Weaver, D.S., Ziada, S.
A theoretical model for self excited vibrations in hydraulic gates, valves and seals
Transactions of the ASME, Vol. 102, May, 1980
- 3 Vrijer, A.
Toegevoegde watermassa en instabiele trillingen van schuiven met een verticale bewegingsmogelijkheid.
Waterloopkundig Laboratorium, verslag M 1322, febr., 1977
- 4 Uwland, J.
Stabiliteitsgedrag van schuiven met diverse onderrandvormen, bij een verticale bewegingsmogelijkheid
Waterloopkundig Laboratorium, verslag M 1490, dec., 1982
- 5 Uwland, J.
Bepaling koëfficiënten van de verticale kracht op de schuifonderrand
Waterloopkundig Laboratorium, verslag M 1497/1498, dec., 1982
- 6 Jongeling, T.H.G.
Onderzoek in een hydraulisch model naar het ontstaan van in-flow trillingen in schuifranden. Waterloopkundig Laboratorium, verslag M 1906/Q 190, mei 1986
- 7 Thomann, H.
Oscillations of a simple valve connected to a pipe
Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Part I, Vol. 27, 1976, Part II, Vol. 29, 1978
- 8 D'Netto, W., Weaver, D.S.
Self excited vibration of valves operating at small openings
Winter annual meeting ASNME, Nov., 1983

LITERATUUR (vervolg)

9 Kolkman, P.A.

Gate vibrations

In: Developments in hydraulic engineering (edited by P. Novak) Elsevier
applied science publishers, Essex, England, 1984

Run	Valve	l (m)	x (mm)	U_{20} (m/s)	ω_0 (s ⁻¹)	A	B	C	L	X	Y
1	I	0.5	4	102	80.9	-0.102	1.02	0.00592	0.122	0.116	17.8
					244	-0.102	1.02	0.0178	0.367	0.348	5.90
2		1.5	4	102	80.9	-0.104	1.02	0.0060	0.358	0.340	17.8
					241	-0.104	1.02	0.0180	1.07	1.01	5.99
3		2.5	4	102	81.3	-0.103	1.02	0.00599	0.598	0.567	17.7
					248	-0.103	1.02	0.0183	1.83	1.73	5.80
4		13.1	4	91.6	80.9	-0.0918	1.14	0.00594	3.07	2.94	14.1
					251	-0.0918	1.14	0.0185	9.54	9.15	4.54
5		2.5	4	55.1	81.3	-0.0554	1.90	0.00599	0.594	0.586	4.95
					246	-0.0554	1.90	0.0182	1.80	1.78	1.63
6		13.1	4	91.6	49.5	-0.249	1.14	0.00986	1.88	1.67	25.1
					150	-0.249	1.14	0.0299	5.71	5.05	8.27
7		0.5	4	55.1	80.9	-0.0552	1.89	0.00594	0.122	0.120	5.00
					244	-0.0552	1.89	0.0179	0.366	0.361	1.66
8		0.5	4	34.8	80.9	-0.0347	3.01	0.00591	0.121	0.120	1.97
					247	-0.0347	3.01	0.0181	0.370	0.368	0.642
9		0.5	22	81.2	80.9	-0.110	3.46	0.00730	0.127	0.125	4.41
					244	-0.110	3.46	0.0220	0.381	0.375	1.47
10	II	0.6	30	106	80.3	0.0392	0.334	0.00194	0.128	0.136	-57.3
					245	0.0392	0.334	0.00590	0.947	0.963	-18.8
11		4.1	30	106	80.8	0.0393	0.334	0.00195	0.949	1.00	-56.9
					245	0.0393	0.334	0.00592	2.87	3.04	-18.8
12		13.1	30	98.8	80.6	0.0364	0.358	0.00195	3.08	3.23	-49.8
					247	0.0364	0.358	0.00597	9.45	9.92	-16.2
13		13.1	30	98.8	49.6	0.100	0.359	0.00331	1.89	2.14	-74.8
					153	0.100	0.359	0.0102	5.85	6.61	-24.2

$\rho_0 = 1.14 \text{ kg/m}^3$

$a_0 = 344 \text{ m/s}$

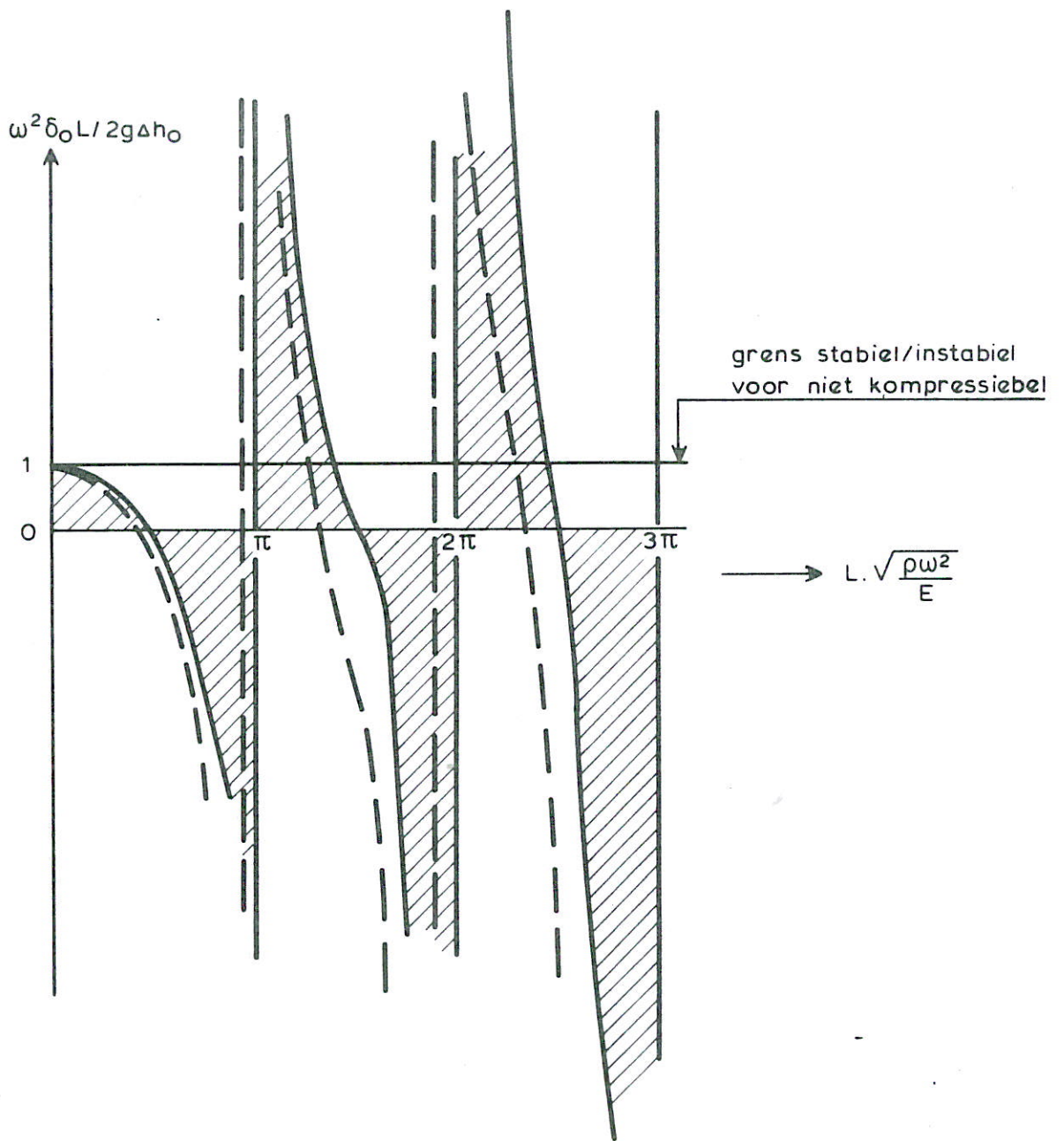
Tabel 1 Experimentele gegevens Thomann

	X	Y	L	ω_o	m
run 13					
1	2,126	-77,268	1,88	49,4	0,841
2	2,319	-70,634	2,05	53,9	0,707
3	2,531	-64,78	2,239	58,8	0,593
4	2,763	-59,122	2,444	64,2	0,498
5	3,063	-54,049	2,709	71,1	0,405
6	3,440	-48,78	3,042	79,88	0,321
7	3,478	-48,39	3,076	80,78	0,314
8	4,010	-41,951	3,546	93,118	0,236
9	4,589	-37,073	4,059	106,58	0,180
10	4,638	-36,683	4,101	107,70	0,177
11	4,966	-34,146	4,392	115,33	0,154
12	5,304	-32,195	4,691	123,19	0,135
13	5,614	-30,244	4,965	130,4	0,121
14	5,903	-28,878	5,221	137,097	0,109
15	6,106	-28,293	5,40	141,8	0,102
16	6,329	-27,317	5,597	150,0	0,095
17	6,609	-25,34	5,845	153,5	0,087

Tabel 2 Vervolg

run	uit tabel 1 en fig. 2.5-2.7				Thomann	berekend met WL-II (98)
	y_0 10^{-3} m	L m	u_{20} m/s	u_0 m/s	$\omega_{Tho.}$ s^{-1}	ω_{kr} s^{-1}
1	4	0,5	102	20,9	-	781
2	4	1,5	102	20,9	-	317
3	4	2,5	102	20,9	180	200
4	4	13,1	91,6	18,7	84, 118, 168, 193	121, 202
5	4	2,5	55,1	11,3	160	170
6	4	13,1	91,6	18,7	84, 117	121
7	4	0,5	55,1	11,3	-	519
8	4	0,5	34,8	71,2	-	-
9	22	0,5	81,2		-	-
10	30	0,6	106		-	-
11	30	4,1	106		135	129, 135
12	30	13,1	98,8		123, 162, 205, 240	123, 125, 208
13	30	13,1	98,8		-	-

Tabel 3 Vergelijking experimenten Thomann - WL-II



	β	M (Mach)
— — — —	1	0
— — — —	0,91	0,3

- stabiele bereik (voor $M=0$)

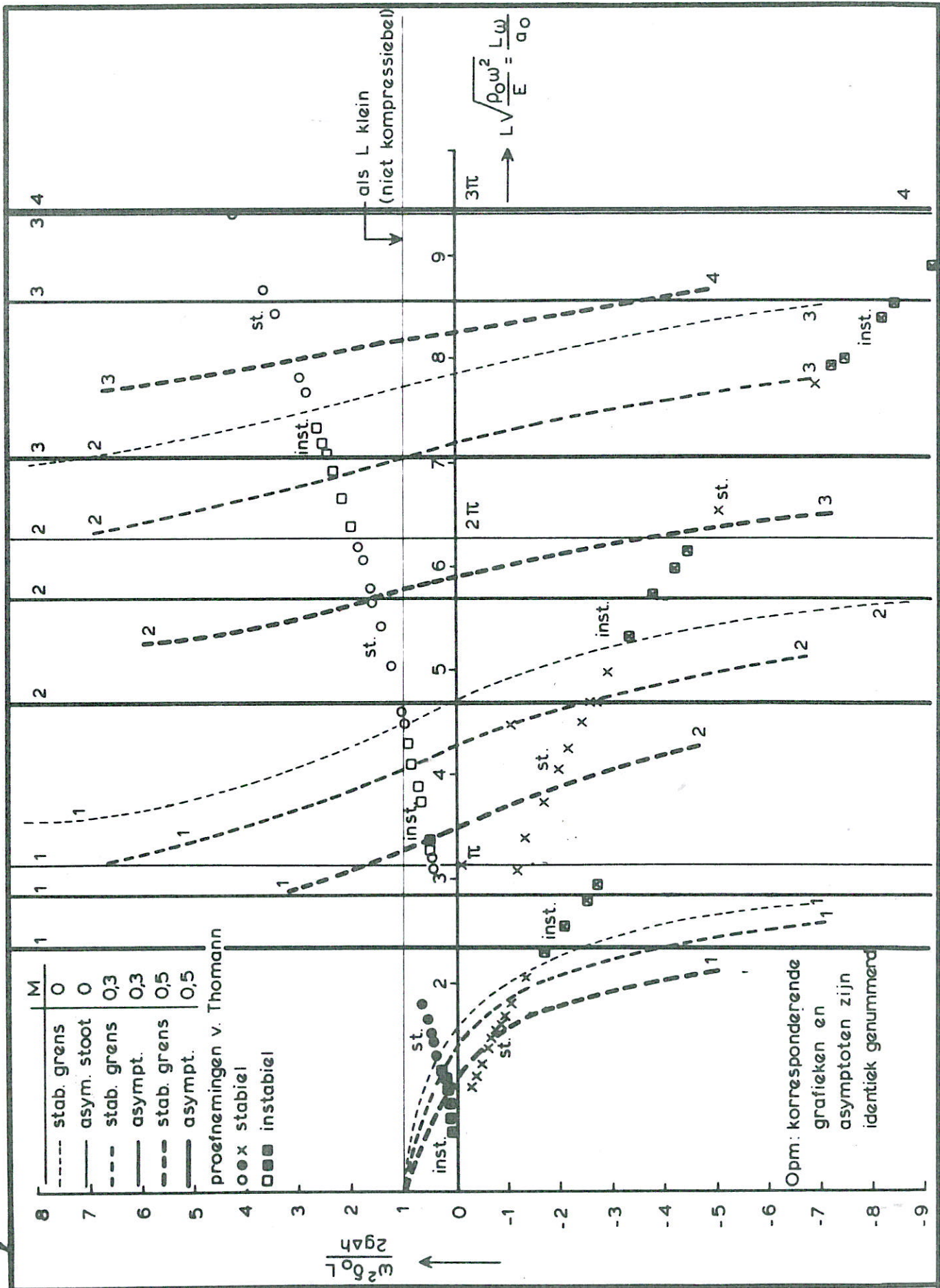
 instabiele bereik (voor $M=0$)

STABILITEITSDIAGRAM WL - II

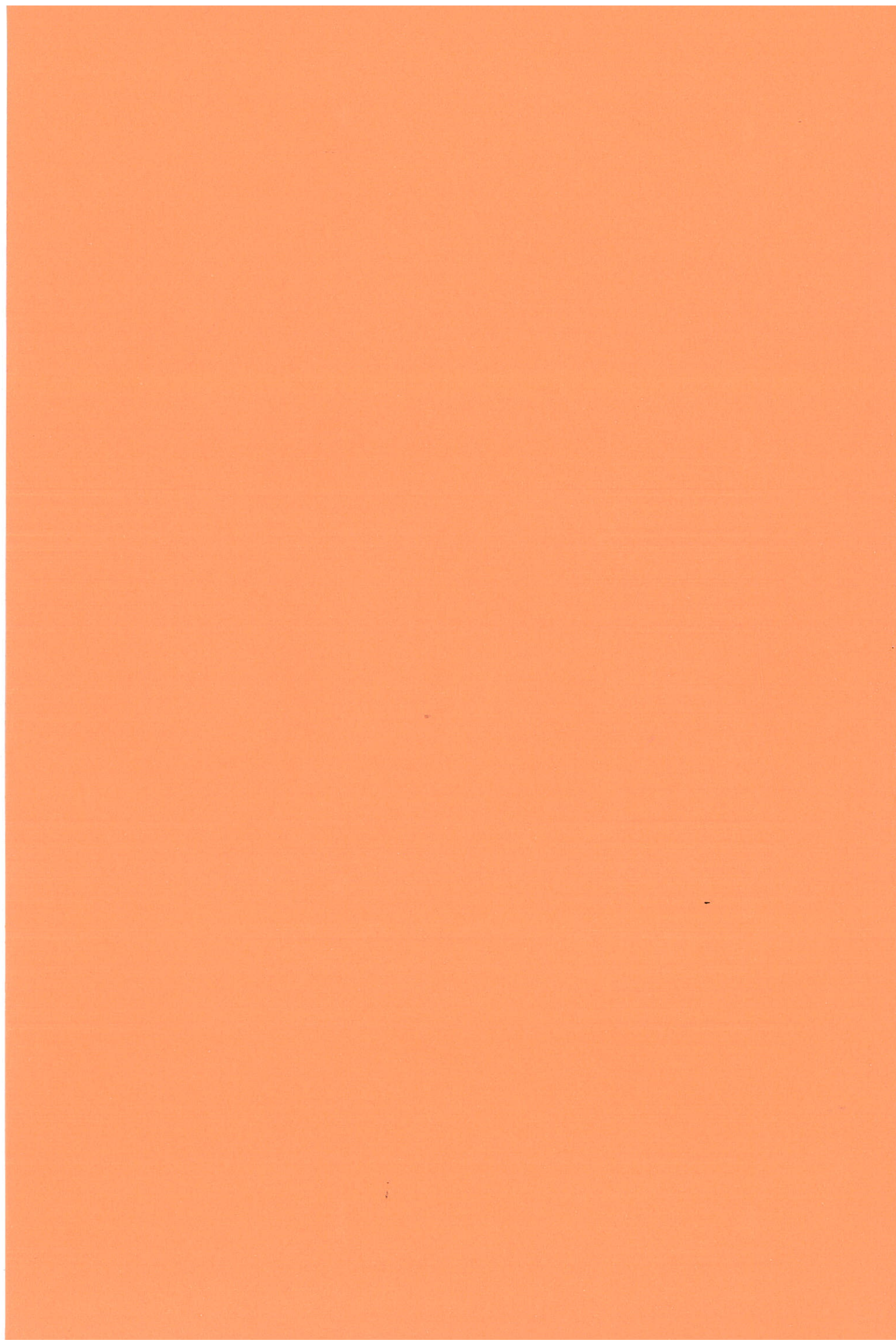
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R 1865

FIG. 1



EXPERIMENTEN THOMANN WEERGEGEVEN
 IN WL-II STABILITEITSDIAGRAM



APPENDIX 1: BASISVERGELIJKINGEN VOOR STROMING IN LEIDING ZONDER WRIJVING

Uitgangspunten:

De stroming (1-dimensionaal) wordt beschreven met

$u(x,t)$ = snelheid

$p(x,t)$ = druk

$\rho(x,t)$ = dichtheid

In geval van een niet-samendrukbare vloeistof is $\rho = \rho_0 = \text{konstant}$.

De beschrijving van de stroming is mogelijk met de continuïteits- de impuls- en de toestandsvergelijking:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$p = p(\rho) \quad \text{of} \quad a^2 = dp/d\rho \quad (3)$$

a = voortplantingssnelheid kleine drukverstoringen

De resulterende stromingstoestand kan worden opgevat als een verstoring ten opzichte van ongestoorde uniforme stroming, die wordt gekarakteriseerd door u_0, p_0, ρ_0 (a_0)

$$u(x,t) = u_0 + u'(x,t)$$

$$p(x,t) = p_0 + p'(x,t) \quad (4)$$

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t) = \rho_0 (1 + \sigma(x,t))$$

waarbij

$$\sigma = \rho'/\rho_0$$

(3) in een Taylor-reeks ontwikkeld levert:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \approx \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 + \left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_0 (\rho - \rho_0) + \theta((\rho_0 \sigma)^2)$$

dus

$$a^2 = a_0^2 + \rho_0 \sigma \left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_0 + \theta((\rho_0 \sigma)^2) \quad (5)$$

a_0 = konstante

(4) gesubstitueerd in (1) en (2) geeft

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (u_0 + u') \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho_0 (1 + \sigma) \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u_0 + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 (1 + \sigma)} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$\frac{\partial p'}{\partial x}$ volgt uit (3)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (8)$$

Zodat met behulp van (4) volgt:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a^2 \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (9)$$

Het stelsel vergelijkingen wordt dus

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (u_0 + u') \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 + \sigma) \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u_0 + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{a^2}{1 + \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a^2 \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (12)$$

Als u' , p' en ρ' kleine verstoringen zijn dan kan dit stelsel door linearisering vereenvoudigd worden.

$(u_0 + u')$ mag dan vervangen worden door u_0

$(1 + \sigma)$ mag dan vervangen worden door 1

a^2 mag dan vervangen worden door $a_0^2 \left(1 + \frac{\rho_0 \sigma}{a_0^2} \left(\frac{d^2 p}{d\delta}\right)_0\right)$ (zie (5))

$\frac{a^2}{1+\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ mag dan vervangen worden door $a_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ (uit reeksontw. $\frac{1}{1+\sigma}$)

Het gelineariseerde stelsel vergelijkingen voor u' , p' en σ' is dus:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + a_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$$p' = a_0^2 \rho_0 \sigma \quad (15)$$

Oplossing

De oplossingen van dit stelsel hebben de vorm van:

$$\sigma = \hat{\sigma}(x) e^{(\alpha+i\omega)t}$$

$$u' = \hat{u}(x) e^{(\alpha+i\omega)t}$$

Wordt dit gesubstitueerd in (13) en (14) dan volgt:

$$(\alpha+i\omega) \hat{\sigma} + u_0 \frac{d\hat{\sigma}}{dx} + \frac{d\hat{u}}{dx} = 0 \quad (16)$$

$$(\alpha+i\omega) \hat{u} + u_0 \frac{d\hat{u}}{dx} + a_0^2 \frac{d\hat{\sigma}}{dx} = 0 \quad (17)$$

(16) en (17) zijn op te lossen door substitutie van

$$\hat{u}(x) = u_p e^{px} \quad (18)$$

en

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma_p e^{px} \quad (19)$$

dan volgt:

$$(\alpha+i\omega) \sigma_p + u_0 \sigma_p * p + u_p p = 0 \quad (20)$$

$$(\alpha+i\omega) u_p + u_o u_p * p + a_o^2 p \sigma_p = 0 \quad (21)$$

Eliminatie van (bijv.) σ_p uit (21) levert:

$$\sigma_p = -\frac{u_p}{a_o^2 p} \{\alpha+i\omega+u_o p\} \quad (22)$$

(22) ingevuld in (20) geeft:

$$u_p \{a_o^2 p^2 - (\alpha+i\omega+u_o p)^2\} = 0 \quad (23)$$

Oplossingen van (23) zijn mogelijk als:

$$a_o^2 p^2 - (\alpha+i\omega+u_o p)^2 = 0$$

of:

$$p^2 (a_o^2 - u_o^2) - 2(\alpha+i\omega) u_o p - (\alpha+i\omega)^2 = 0$$

dus als:

$$p_{1,2} = \frac{2(\alpha+i\omega) u_o \pm 2(\alpha+i\omega) a_o}{2(a_o^2 - u_o^2)} = \frac{(\alpha+i\omega)(u_o \pm a_o)}{a_o^2 - u_o^2}$$

is:

$$p_1 = \frac{\alpha+i\omega}{a_o - u_o} \text{ en } p_2 = -\frac{\alpha+i\omega}{a_o + u_o} \quad (24)$$

Voor $\hat{u}(x)$ en $\hat{\sigma}(x)$ geldt dan:

$$\hat{u}(x) = u_{p_1} e^{-\frac{\alpha+i\omega}{1+M} \frac{x}{a_o}} + u_{p_2} e^{+\frac{\alpha+i\omega}{1-M} \frac{x}{a_o}} \quad (25)$$

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma_{p_1} e^{-\frac{\alpha+i\omega}{1+M} \frac{x}{a_o}} + \sigma_{p_2} e^{+\frac{\alpha+i\omega}{1-M} \frac{x}{a_o}} \quad (26)$$

waarin:

$$M = \frac{u_o}{a_o} \quad (27)$$

Voor $u'(x,t)$ en $\sigma(x,t)$ geldt:

$$u'(x,t) = u_{p_1} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t - \frac{x}{a_o(1+M)}\right\}} + u_{p_2} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t + \frac{x}{a_o(1-M)}\right\}} \quad (28)$$

$$\sigma(x,t) = \sigma_{p_1} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t - \frac{x}{a_o(1+M)}\right\}} + \sigma_{p_2} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t + \frac{x}{a_o(1-M)}\right\}} \quad (29)$$

+	-
: naar rechts	: naar links
lopende golf	lopende golf
$\left(\frac{dx}{dt} = a_o + u_o\right)$	$\left(\frac{dx}{dt} = a_o - u_o\right)$

en voor $p'(t)$:

$$p'(x,t) = a_o^2 \delta_o \sigma_{p_1} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t - \frac{x}{a_o(1+M)}\right\}} + a_o^2 \delta_o \sigma_{p_2} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t + \frac{x}{a_o(1-M)}\right\}} \quad (30)$$

Het verband tussen u_p en σ_p :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_o \frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (13)$$

is, door gebruik te maken van (28) en (29) te schrijven als:

$$\begin{aligned} & (\alpha+i\omega) \left[\sigma_{p_1} e^{(\cdot)\{+\}} + \sigma_{p_2} e^{(\cdot)\{-}\} \right] + u_o \left[\left(-\frac{\alpha+i\omega}{a_o(1+M)}\right) \sigma_{p_1} e^{(\cdot)\{+\}} + \frac{\alpha+i\omega}{a_o(1-M)} \sigma_{p_2} e^{(\cdot)\{-}\} \right] = \\ & = u_{p_1} \frac{\alpha+i\omega}{a_o(1+M)} e^{(\cdot)\{+\}} - u_{p_2} \frac{\alpha+i\omega}{a_o(1-M)} e^{(\cdot)\{-}\} \end{aligned} \quad (31)$$

N.B.:

$$e^{(\cdot)\{+\}} = e^{(\alpha+i\omega)\left\{t + \frac{x}{a_o(1+M)}\right\}}$$

$$e^{(\cdot)\{-}\} = e^{(\alpha+i\omega)\left\{t - \frac{x}{a_o(1-M)}\right\}}$$

zodat

$$\sigma_{p_1} \left(1 - \frac{M}{(1+M)}\right) = u_{p_1} \frac{1}{a_o(1+M)}$$

$$\sigma_{p_2} \left(1 + \frac{M}{1-M}\right) = -u_{p_2} \frac{1}{a_o(1-M)}$$

dus:

$$\delta_{p_1} = \frac{u_{p_1}}{a_o} \tag{32}$$

$$\sigma_{p_2} = \frac{-u_{p_2}}{a_o} \tag{33}$$

De oplossingen voor u' en p' luiden:

$$u'(x,t) = u_{p_1} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t - \frac{x}{a_o(1+M)}\right\}} + u_{p_2} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t + \frac{x}{a_o(1-M)}\right\}} \tag{34}$$

$$p'(x,t) = a_o^2 \rho_o \left[\frac{u_{p_1}}{a_o} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t - \frac{x}{a_o(1+M)}\right\}} - \frac{u_{p_2}}{a_o} e^{(\alpha+i\omega)\left\{t + \frac{x}{a_o(1-M)}\right\}} \right] \tag{35}$$

Of iets algemener:

$$u'(x,t) = A_u e^{()}[-] + B_u e^{()}[+] \tag{36}$$

$$p'(x,t) = \rho_o a_o [A_u e^{()}[-] - B_u e^{()}[+]] \tag{37}$$

APPENDIX 2: HARMONISCHE OPLOSSING ID SAMENDRUKBARE STORMING MET WRIJVINGSTERM

Wordt wrijving verdisconteerd, dan dient dit in de impulsvergelijking ((11) uit appendix 1) tot uitdrukking te komen in een term van de vorm " $\theta |u|u$ ".

De impulsvergelijking (11) wordt dan:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u_0 + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{a_0^2}{1+\sigma} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \theta |u_0 + u'| (u_0 + u') = 0 \quad (38)$$

Wordt (38) eveneens gelineariseerd dan wordt dit

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + a_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \theta |u_0| u_0 + 2\theta |u_0| u' = 0 \quad (39)$$

waarbij $\theta |u_0| u_0$ een konstante C is.

Het stelsel lineaire vergelijkingen is dus

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u_0 + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + a_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \lambda u' = 0 \quad (40)$$

$$\lambda = 2\theta |u_0|$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

$$p' = a_0^2 \rho_0 \sigma = 1 \quad (42)$$

waarbij:

$$p = p_0^*(x, t) + p'(x, t) \quad (43)$$

en

$$\rho_0^* = \frac{1}{a_0^2} \cdot p_0^*$$

$$p_0^* = ax + bt \quad (\text{lineair } x \text{ en } t) \quad (44)$$

$$= p_0 + \rho_0 a_0 C M\left(t - \frac{x}{a_0 M}\right)$$

Oplossingen zijn mogelijk in de vorm van

$$\sigma = \hat{\sigma}(x) e^{(\alpha+i\omega)t} \quad (45)$$

$$u' = \hat{u}(x) e^{(\alpha+i\omega)t} \quad (46)$$

Worden (45) en (46) gesubstitueerd in (40) en (41) dan

$$(\alpha+i\omega) \hat{u} + u_o \frac{d\hat{u}}{dx} + a_o^2 \frac{d\sigma}{dx} + \lambda \hat{u} = 0 \quad (47)$$

$$(\alpha+i\omega) \hat{\sigma} + u_o \frac{d\hat{\sigma}}{dx} + \frac{d\hat{u}}{dx} = 0 \quad (48)$$

(47) en (48) zijn op te lossen door substitutie van

$$\hat{u}(x) = u_p e^{px} \quad (49)$$

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma_p e^{px} \quad (50)$$

zodat

$$\sigma_p \{(\alpha+i\omega) + u_o p\} + u_p \cdot p \quad (51)$$

$$u_p \{(\alpha+i\omega) + u_o p + \lambda\} + \sigma_p a_o^2 p = 0 \quad (52)$$

Uit (50) volgt

$$\sigma_p = \frac{-u_p}{a_o^2 p} \{(\alpha+i\omega) + u_o p + \lambda\} \quad (53)$$

Dit ingevuld in (51) levert:

$$u_p \left\{ -\frac{1}{a_o^2} (\alpha+i\omega + u_o p + \lambda) (\alpha+i\omega + u_o p) + p^2 \right\} \\ u_p \left[(a_o^2 - u_o^2) p^2 - \{2u_o(\alpha+i\omega) + \lambda u_o\} p - (\alpha+i\omega)(\alpha+i\omega + \lambda) \right] = 0 \quad (54)$$

(54) is een vierkantsvergelijkinge in p:

$$R p^2 - S p - T = 0 \quad (55)$$

waarbij:

$$R = (a_0^2 - u_0^2)$$

$$S = (2u_0 (\alpha + i\omega + \lambda u_0))$$

$$T = (\alpha + i\omega)(\alpha + i\omega + \lambda)$$

De diskriminant van (55): $D = S^2 - 4 RT$

$$\text{of } D = \lambda^2 u_0^2 + 4 a_0^2 (\alpha + i\omega)^2 + 4 \lambda a_0^2 (\alpha + i\omega)$$

$$\text{of } D = a_0^2 [\lambda^2 M^2 + 4(\alpha + i\omega)^2 + 4\lambda(\alpha + i\omega)] \quad (56)$$

stel

$$\frac{\lambda}{\omega} = \xi$$

$$\frac{\alpha}{\omega} = \eta$$

dan is

$$D = 4 a_0^2 \omega^2 \left[\xi^2 \frac{M^2}{4} + \eta^2 - 1 + \eta\xi + i(2\eta + 4\xi) \right] \quad (57)$$

$$D = 4 a_0^2 \omega^2 (a_1 + ia_2) \quad (58)$$

$$a_1 = \xi^2 \frac{M^2}{4} + \eta^2 - 1 + \eta\xi$$

$$a_2 = 2\eta + \xi$$

$$\sqrt{D} = \pm 2 a_0 \omega (z_1 + iz_2) \quad (59)$$

$z = z_1 + iz_2$ (de positieve wortel van $(a_1 + ia_2)$)

zodat

$$z_1 = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{4}} \cos\left\{\frac{1}{2} \arctg \frac{a_2}{a_1}\right\} \quad (60)$$

$$z_2 = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{4}} \sin\left\{\frac{1}{2} \arctg \frac{a_2}{a_1}\right\} \quad (61)$$

of

$$z = z_1 + iz_2 = r^{\frac{1}{2}} e^{i\phi/2} \quad \text{met } r = (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}, \phi = \arctg \frac{a_2}{a_1}$$

zodat

$$z_1 = |z| \cos(\arg(z)) \quad (62)$$

$$z_2 = |z| \sin(\arg(z)) \quad (63)$$

met

$$|z| = \left(\left(\zeta^2 \frac{M^2}{4} + \eta^2 - 1 + \eta\zeta \right)^2 + (2\eta + \zeta)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (64)$$

$$\arg(z) = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\eta + \zeta}{\zeta^2 \frac{M^2}{4} + \eta^2 - 1 + \eta\zeta} \right) \quad (65)$$

(54) heeft als wortels:

$$p_1 = \frac{u_0 \left(\alpha + i\omega + \frac{\lambda}{2} \right) + a_0 \omega(z_1 + iz_2)}{(a_0^2 - u_0^2)} \quad (66)$$

$$p_2 = \frac{u_0 \left(\alpha + i\omega + \frac{\lambda}{2} \right) - a_0 \omega(z_1 + iz_2)}{(a_0^2 - u_0^2)} \quad (67)$$

Na uitwerken volgt:

$$p_1 = \frac{\omega}{a_0(1-M^2)} \left\{ \left(\eta + \frac{\zeta}{2} \right) M + z_1 + i(M+z_2) \right\} \quad (68)$$

$$p_2 = \frac{\omega}{a_0(1+M^2)} \left\{ \left(\eta + \frac{\zeta}{2} \right) M - z_1 + i(M-z_2) \right\} \quad (69)$$

of vereenvoudigd:

$$p_1 = \frac{\omega}{a_0(1-M^2)} \{Mr+z\} \quad (70)$$

$$p_2 = \frac{\omega}{a_0(1+M^2)} \{Mr-z\} \quad (71)$$

met r en z complex

waarin $r = r_1 + ir_2$, $r_1 = \eta + \frac{1}{2}\zeta$; $r_2 = 1$

en $z = z_1 + iz_2$, z_1 en z_2 volgens (59) t/m (64)

De oplossing (homogene vergelijking) voor $\hat{u}(x)$ en $\hat{\sigma}(x)$ volgens (49) en (50) wordt:

$$\hat{u}(x) = u_{p_1} e^{\frac{\omega}{a_0(1-M^2)} \{Mr+z\}x} + u_{p_2} e^{\frac{\omega}{a_0(1-M^2)} \{Mr-z\}x} \quad (72)$$

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma_{p_1} e^{\frac{\omega}{a_0(1-M^2)} \{Mr+z\}x} + \sigma_{p_2} e^{\frac{\omega}{a_0(1-M^2)} \{Mr-z\}x} \quad (73)$$

Algemene oplossing voor $u'(x,t)$ en $\sigma(x,t)$ (volgens (40) en (41)):
 waarbij is overgegaan op A_u, B_u, A_σ en B_σ

$$u'(x,t) = A_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{\omega(z-Mr)}{a_0(\alpha+i\omega)(1-M^2)} x\right)\right\} + B_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{\omega(z+Mr)}{a_0(\alpha+i\omega)(1-M^2)} x\right)\right\} \quad (74)$$

$$\sigma(x,t) = A_\sigma \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{\omega(z-Mr)}{a_0(\alpha+i\omega)(1-M^2)} x\right)\right\} + B_\sigma \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{\omega(z+Mr)}{a_0(\alpha+i\omega)(1-M^2)} x\right)\right\} \quad (75)$$

De verstoringen zijn aangenomen ten opzichte van u_0, ρ_0 en p_0^* .

Ter vereenvoudiging wordt gesteld:

$$\frac{\omega(z+Mr)}{\alpha+i\omega} = \frac{z+Mr}{\eta+i} = k = k_1 + ik_2 \quad (76)$$

$$\frac{\omega(z-Mr)}{\alpha+i\omega} = \frac{z-Mr}{\eta+i} = q = q_1 + iq_2 \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{z+Mr}{\eta+i} &= \frac{\eta-i}{\eta^2+1} \{z_1+Mr_1 + i(z_2+Mr_2)\} \\ &= \frac{1}{\eta^2+1} \{\eta(z_1+Mr_1) + z_2+Mr_2 + i(-z_1-Mr_1 + \eta(z_2+Mr_2))\} \end{aligned}$$

zodat

$$k_1 = \frac{1}{\eta^2+1} \{\eta(z_1+Mr_1) + z_2+Mr_2\} \quad (78)$$

$$k_2 = \frac{1}{\eta^2+1} \{-z_1-Mr_1 + \eta(z_2+Mr_2)\} \quad (79)$$

evenzo volgt

$$q_1 = \frac{1}{\eta^2+1} \{n(z_1 - Mr_1) + z_2 - Mr_2\} \quad (80)$$

$$q_2 = \frac{1}{\eta^2+1} \{-(z_1 - Mr_1) + n(z_2 - Mr_2)\} \quad (81)$$

zodat (74) en (75) worden:

$$u'(x,t) = A_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} + B_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \quad (82)$$

$$\sigma(x,t) = A_\sigma \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} + B_\sigma \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \quad (83)$$

indien

$$\exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} = \exp\{-\}$$

en

$$\exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} = \exp\{+\}$$

$$\text{dan volgt uit } \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_o \frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (40)$$

dat

$$A_\sigma(\alpha+i\omega) \exp\{-\} + B_\sigma(\alpha+i\omega) \exp\{+\} +$$

$$u_o \left[A_\sigma(\alpha+i\omega) \left(-\frac{q}{a_o(1-M^2)}\right) \exp\{-\} + B_\sigma(\alpha+i\omega) \left(\frac{k}{a_o(1-M^2)}\right) \exp\{+\} \right] =$$

$$- A_u(\alpha+i\omega) \left(\frac{-q}{a_o(1-M^2)}\right) \exp\{-\} - B_u(\alpha+i\omega) \left(\frac{k}{a_o(1-M^2)}\right) \exp\{+\}$$

zodat

$$A_\sigma \left\{ 1 - u_o \frac{q}{a_o(1-M^2)} \right\} = A_u \frac{q}{a_o(1-M^2)} \quad (84)$$

en

$$B_\sigma \left\{ 1 + u_o \frac{k}{a_o(1-M^2)} \right\} = - B_u \frac{k}{a_o(1-M^2)} \quad (85)$$

of:

$$A_\sigma = \frac{A_u}{a_o} \frac{q}{(1-M^2) - Mq} \quad (86)$$

$$B_{\sigma} = \frac{-B_u}{a_o} \frac{k}{(1-M^2)+Mk} \quad (87)$$

Zodat de uiteindelijke oplossingen voor u' en p' luiden:

$$(p' = a_o^2 \rho_o \sigma)$$

$$u'(x,t) = A_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} + B_u \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \quad (88)$$

$$p'(x,t) = \rho_o a_o \left[A_u \frac{q}{(1-M^2)-Mq} \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t - \frac{qx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} - B_u \frac{k}{(1-M^2)+Mk} \exp\left\{(\alpha+i\omega)\left(t + \frac{kx}{a_o(1-M^2)}\right)\right\} \right] \quad (89)$$

Van belang is de overweging dat de drukfluctuatie wordt beschreven ten opzichte van $p_o^*(x,t)$ waarvoor geldt dat:

$$p_o^*(x,t) = p_o + \rho_o a_o C M \left(t - \frac{x}{a_o M}\right)$$

zodat

$$p = p_o^*(x,t) + p'(x,t) \text{ (is de wrijving afwezig dan is } C = 0)$$

en dus

$$p_o^*(x,t) = p_o$$

In geval van alleen wrijving; dus zonder kompressibiliteit geldt

$$M = \frac{u_o}{a_o} = 0$$

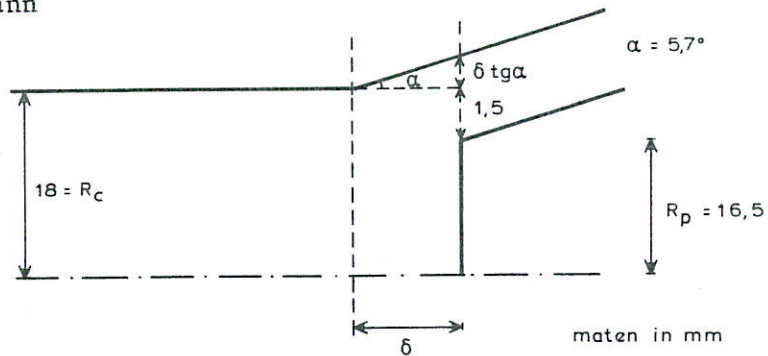
dus

$$p^*(x,t) = p_o + \frac{\rho_o a_o C x}{-a_o}$$

$$p^*(x,t) = p_o - \rho C x$$

APPENDIX 3: BEREKENING SPLEETOPPERVLAK A_{GAP}

Valve 1 Thomann



$$\begin{aligned}
 A_{\text{gap}} &= \pi(R_c + \delta \operatorname{tg} \alpha)^2 - \pi R_p^2 \\
 &= \pi(18 \cdot 10^{-3} + 0,100 \delta)^2 - \pi 16,5^2 \cdot 10^{-6} \\
 &= \pi(18^2 \cdot 10^{-6} + 3,593 \delta \cdot 10^{-3} + 0,010 \delta^2) - \pi 272,25 \cdot 10^{-6} \\
 &= \pi(0,010 \delta^2 + 3,593 \delta \cdot 10^{-3} + 51,65 \cdot 10^{-6})
 \end{aligned}$$

Voor A_{gap} geldt dus:

$$A_{\text{gap}} = a_1 \delta^2 + b_1 \delta + c_1$$

waarbij

$$a_1 = 0,010 \pi$$

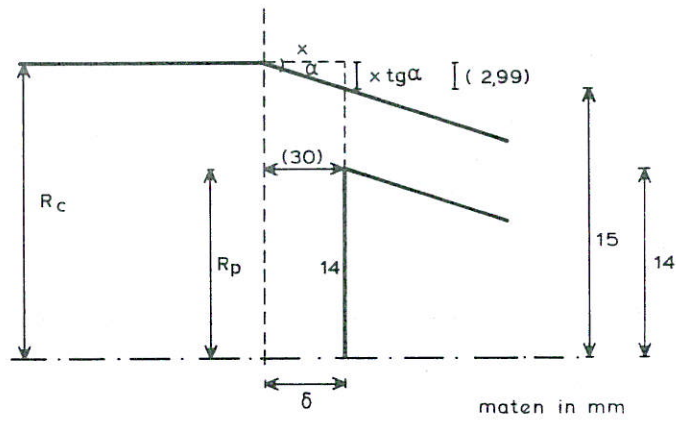
$$b_1 = 3,593 \cdot 10^{-3} \pi$$

$$c_1 = 51,75 \cdot 10^{-6}$$

terwijl

$$\frac{dA_{\text{gap}}}{d\delta} = 2a_1 \delta + b_1$$

Valve 2 Thomann



$$\begin{aligned}
 A_{\text{gap}} &= \pi [R_c - \delta \operatorname{tg} \alpha]^2 - \pi R_p^2 \\
 &= \pi (10 \cdot 10^{-3} - 0,100 \delta)^2 - \pi 14^2 \cdot 10^{-6} \\
 &= \pi (324 \cdot 10^{-6} - 3,593 \cdot 10^{-3} \delta + 0,010 \delta^2) - 196 \pi \cdot 10^{-6} \\
 &= 0,010 \pi \delta^2 - 3,593 \pi 10^{-3} \delta + 128,7 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

$$A_{\text{gap}} = a_1 \delta^2 + b_1 \delta + c_1$$

$$a_1 = 0,010 \pi$$

$$b_1 = -3,593 \cdot 10^{-3} \pi$$

$$c_1 = 128 \pi \cdot 10^{-6}$$

p.o. box 177

2600 mh delft

the netherlands