

RAPPORT N°1 1949



OVERZICHT VAN DE METHODEN VOOR HET BEPALEN VAN DE GETUBEWEGING OP DE NEDERLANDSE ZEEARMEN EN GETURIVIEREN

DOOR

DR. J. J. DRONKERS EN DR. IR. JOH. VAN VEEN

**Overzicht van de methoden
voor het bepalen van de getijbeweging op de Nederlandse
zeearmen en getijrivieren**

door

Dr. J. J. Drönkers en Dr. Ir. Joh. van Veen.



I N H O U D

Resumé

Hoofdstuk I.

- § 1 Vergelijking der H.W.-standen in de Waddenzee voor en na de afsluiting der Zuiderzee, zowel volgens de metingen als volgens de berekeningen.
- § 2 Berekening van het M_2 -getij voor een begrensd geulenstelsel volgens de methode Lorentz.
- § 3 Berekening van de voortolanting van het M_2 -getij op een rivier.
- § 4 De betekenis van het M_4 -getij en haar berekening.
- § 5 Berekening van het getij in een onregelmatig geulenstelsel met behulp van reeksen.
- § 6 Integratie van de bewegingsvergelijking met behulp van karakteristieke golfcomponenten.

Hoofdstuk II.

- § 1 Inleiding.
- § 2 Analogie tussen waterbeweging en electriciteit.
- § 3 Afbeelding van het M_2 -getij op een electrisch model.
- § 4 Weergave van de waterbeweging met behoud van de quadratische weerstandswet door middel van gelijkrichters.
- § 5 Resultaten van een proef met het electrisch model.
- § 6 Weergave van de quadratische weerstand, veranderlijke diepte en komberging in het electrisch model met behulp van electronenbuizen.

15 Figuren.

1 Tabel.

Résumé.

Door het XVIIe Congrès International de Navigation wordt onderstaande vraag gesteld:

Amélioration des embouchures des voies d'eau naturelles et artificielles, y compris les embouchures de petites dimensions, soit dans une mer sans marée, soit dans une mer à marée. Amélioration des parties fluviomaritimes. Observations et résultats récents. Nouvelles méthodes de réalisation. Comparaison des résultats obtenus avec ceux fournis par des essais sur modèles ou par le calcul (section II, A, la question).

In dit artikel wordt speciaal het tweede deel van de vraag behandeld en een overzicht gegeven van verschillende methoden waarmee de voortplanting van het getij in een rivier of rivierenstelsel kan worden bepaald.

Wanneer in het regime der getijwateren veranderingen worden geprojecteerd, bijv. in het belang van de scheepvaart, is het noodzakelijk om de wijziging van de getijbeweging te bepalen. De waterbeweging bij de nieuwe toestand zal niet alleen gunstiger voor de scheepvaart maar ook van zodanig karakter moeten zijn, dat de wijzigingen die in de getijwateren worden aangebracht, in stand gehouden kunnen worden.

De getijvoortplanting kan op tweeërlei wijze bepaald worden, hetzij met behulp van mathematische methoden, hetzij door nabootsing van het getij in een model. Dit laatste kan dan nog van hydraulische of elektrische aard zijn. In dit artikel wordt dan speciaal het electrisch model, zoals dit tot dusver ontwikkeld is, nader behandeld.

De mathematische methoden worden in hoofdstuk I behandeld door Dr. J. J. Dronkers en het electrisch model in hoofdstuk II door Dr. Ir. Joh. van Veen.

In de eerste plaats worden de resultaten met deze methoden verkregen, vergeleken met waarnemingen: Voor het Nederlandse gebied heeft dit dan betrekking op de afsluiting van de Zuiderzee (zie hoofdstuk I, § 1) en de getijbeweging op de rivier de Lek (hoofdstuk I, § 3, § 5 en hoofdstuk II, § 5).

De volgende methoden van getijberekening worden in het kort behandeld:

- 1e. De methode van Prof. Lorentz (I, § 2) met de uitbreidingen die daaraan gegeven zijn door andere auteurs (I, § 3 en I, § 4).

Hierbij wordt het getij benaderd door het sinusoidale dubbeldaagse M_2 getij. De methode Lorentz werd toegepast om de voortplanting van dit getij bij afgesloten Zuiderzee te bepalen. Ze geldt voor een geulenstelsel, dat aan één zijde afgesloten is, zodat geen opperwaterafvoer voorkomt.

Bij de uitbreiding door Mazure wordt wel opperwaterafvoer in rekening gebracht, zodat dan de voortplanting van het M_2 getij op een rivier kan worden berekend. Bovendien werd rekening gehouden met de invloed van het variëren van de diepte van de rivier met het M_2 getij. De oplossing van de vergelijkingen, die de getijvoortplanting bepalen, geschiedt met behulp van complexe functies. Verder kan nog een nauwkeuriger weergave van het getij worden verkregen door een benadering met het M_2 en M_4 getij. Dit laatste wordt wel het ondiepwatergetij genoemd en heeft de dubbele frequentie van het M_2 getij (I, § 4). Het is speciaal gewenst het M_4 getij te bepalen als het van belang is om de stromen voldoende nauwkeurig te kennen. Dan kunnen eventueel ook de verandering van de stroombreedte en kombergingsbreedte met het getij in rekening worden beschouwd. Dit is van praktisch belang, omdat over het algemeen de breedte bij hoogwater belangrijk groter zal zijn dan bij laagwater.

- 2e. Het is ook mogelijk om de voortplanting van het getij te berekenen met behulp van reeksen (I, § 5), hierbij worden alleen reële functies toegepast.

Deze methode is speciaal geschikt voor zeer onregelmatig gevormde geulenstelsels met gedurende het getij onderlopende platen en banken.

- 3e. Tenslotte wordt een integratiemethode behandeld van Ir. Schönfeld, in beginsel overeenkomende met die welke door Ir. H. Holsters (België) werd uitgewerkt. In opzet en uitwerking vertoont deze methode echter verschillen met de methode van Ir. Holsters.

De integratie geschiedt met behulp van zgn. karakteristieke golfcomponenten, die verwant zijn met lopende golven (I, § 6).

Betreffende het elektrische model, dat in hoofdstuk II nader wordt behandeld, wordt in het kort het volgende medegedeeld.

Er bestaat analogie tussen de getijbeweging in een geul en de wisselstroomverschijnselen in een telegraafkabel, zoodanig dat bijv. waterstand en elektrische spanning en anderszijds afvoeren met elektrische stroom analoog zijn.

Deze telegraafkabel wordt dan evenals de geul, verdeeld gedacht in een aantal secties met continu verdeelde serie- en parallelweerstand, zelfinductie en capaciteit. Iedere sectie wordt dan geconcentreerd in een netwerk, waarbij impedanties worden geconcentreerd in enkele weerstandselementen, smoorspoelen en condensatoren (II, § 2).

Daarna wordt nabootsing van het M_2 getij met behulp van een elektrisch model beschouwd, analoog aan de berekeningsmethode van het M_2 getij volgens Lorentz en Hazure (II, § 3). Dit model is als het ware een rekenmachine om de vergelijkingen, die de voortplanting van het M_2 getij bepalen, op te lossen.

Vervolgens wordt een betere weergave behandeld, waarbij de quadratische weerstandswet in de bewegingsvergelijking door middel van metaalgelijkrichters wordt nagebootst.

In dit geval wordt gebruik gemaakt van de analogie tussen de afvoer en de elektrische spanning en tussen waterstand en elektrische stroom (II, § 4).

In deze modellen wordt de diepte van een riviervak evenals de stroombreedte en de kombergingsbreedte als onafhankelijk van het getij, dus constant aangenomen.

Wel kan de voortplanting van een willekeurig getij worden beschouwd en opperwaterafvoer in rekening worden gebracht.

In § 5 worden de resultaten van een proef met gebruikmaking van gelijkrichters voor de weergave van het getij op de Lek nader beschouwd.

§1. Vergelijking der H.W.standen in de Waddenzee voor en na de afsluiting der Zuiderzee, zowel volgens de metingen als volgens de berekeningen.

In het artikel van H.J.Th. Thijssen: "L'influence de la fermeture du Zuiderzee sur le régime des marées le long des côtes néerlandaises", dat verschenen is in het Bulletin de L'Association internationale permanente des congrès de navigations, Jan. 1933 (zie lit. 2)¹⁾ werd in het kort behandeld op welke wijze de getijbeweging in de Waddenzee vóór en na de afsluiting van de Zuiderzee werd berekend. Vóór de afsluiting moest vanzelfsprekend ook de waterbeweging in de Zuiderzee, die met die van de Waddenzee in nauwe samenhang staat, bij de berekeningen worden betrokken. (als overzichtekaartje van fig. 1)

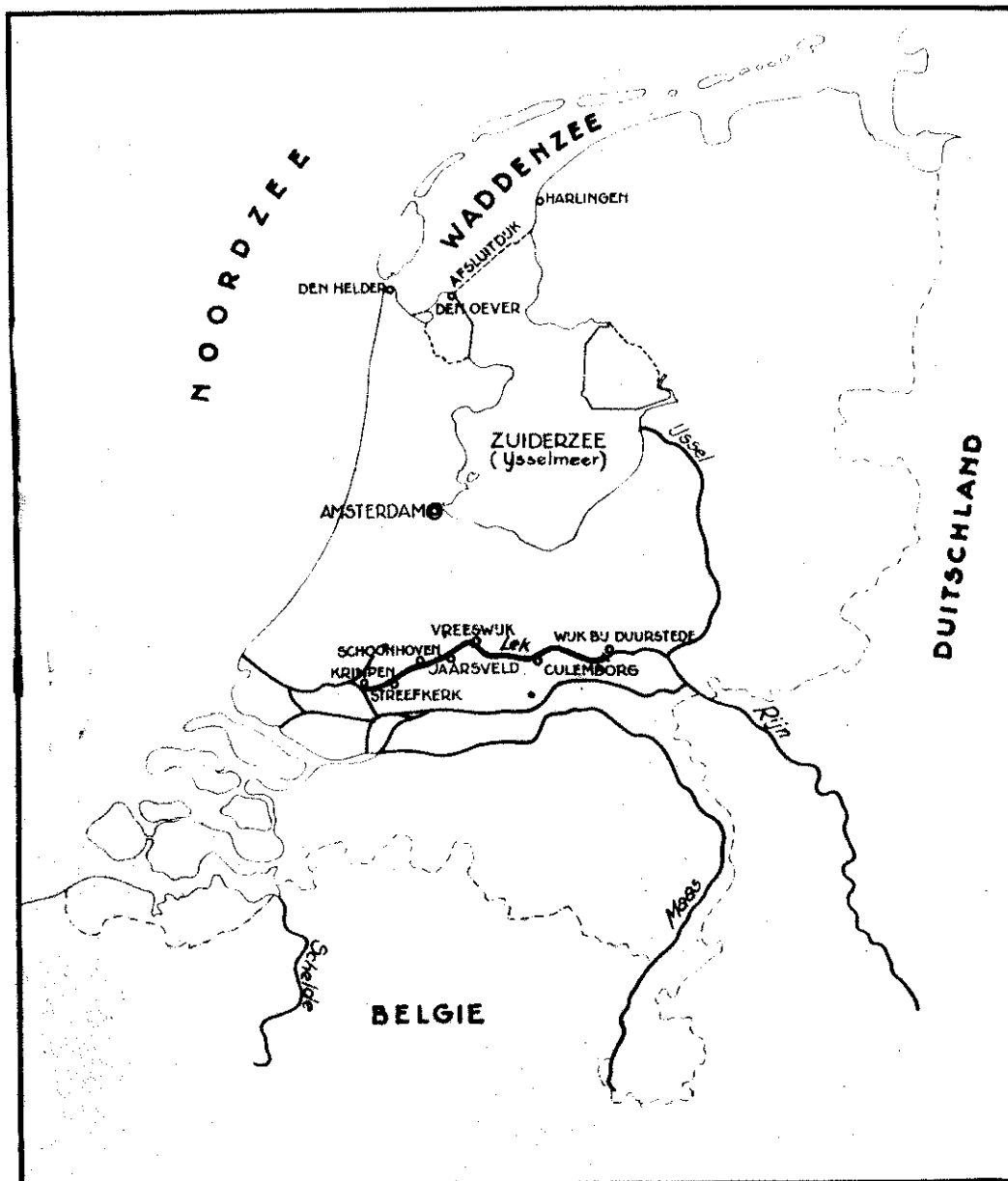


FIG. 1

1) Aan het eind van het artikel bevindt zich de literatuurlijst; het getal 2 duidt het nummer van deze lijst aan.

Hierbij moesten in de eerste plaats de veranderingen der hoogwaterstanden door deze afsluiting bepaald worden, zowel voor normaal-tij als voor stormvloed. Ook moesten de veranderingen der stromen berekend worden om na te gaan welke wijzigingen van het geulenstelsel in de Waddenzee na de afsluiting te verwachten zouden zijn. Deze wijzigingen zouden nl. omgekeerd weer de verticale getijbeweging beïnvloeden.

De rekenmethode, die gevolgd werd om deze vragen te beantwoorden is afkomstig van de beroemde physicus Prof. Lorentz, de voorzitter van de Commissie, die de invloed van de afsluiting der Zuiderzee op de waterbeweging moest onderzoeken. Een uitvoerige uiteenzetting betreffende deze methode vindt men in het Verslag van deze Commissie (zie lit. 1).

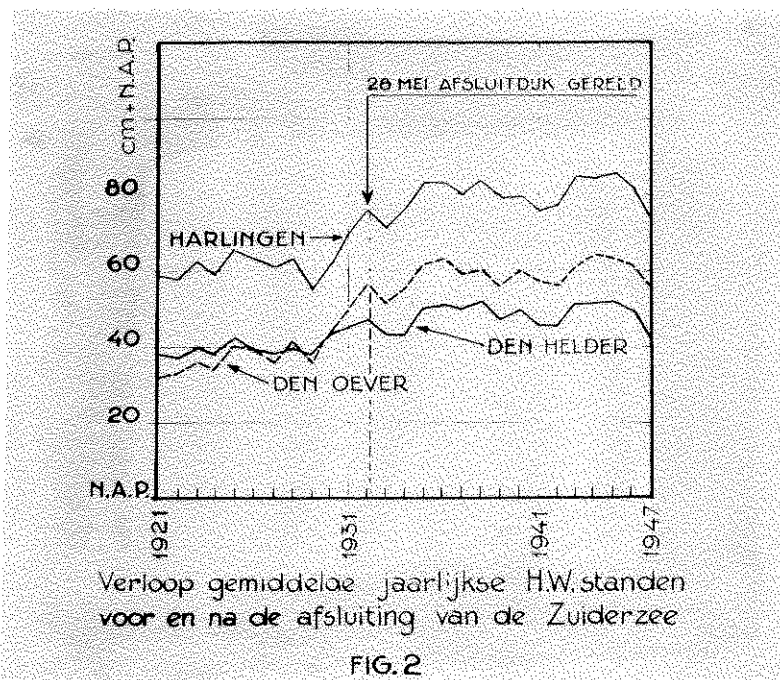
In het hierboven genoemde artikel van M. Thijssen werden tevens de veranderingen aangegeven, die in de hoogwaterstanden op de Waddenzee onmiddellijk na de afsluiting gemeten werden vergeleken met de resultaten der berekeningen. Hierbij bleek reeds direct een goede overeenstemming, hoewel het vergelijkingsmateriaal na de afsluiting slechts op een jaar betrekking had.

Sedertdien zijn zestien jaren verlopen - de afsluiting had nl. in 1932 plaats - en het is de vraag of na deze periode de voorlopige conclusie kon worden gehandhaafd, ook in verband met de wijzigingen van het geulenstelsel in de afgelopen jaren. Deze laatste factor mag eigenlijk niet in rekening worden gebracht bij de beoordeling van de mathematische methode.

Ofschoon bij de berekeningen wel enige veronderstellingen werden gemaakt betreffende veranderingen van het geulenstelsel na de afsluiting, kon dit hoogstens bij benadering geschieden. Het is gebleken, dat het geulenstelsel slechts langzaam is gaan veranderen in de richting, die verwacht werd en dit proces is momenteel zelfs nog niet geheel voltooid.

De verandering der getijbeweging in de loop der jaren na de afsluiting, is dan ook slechts van ondergeschikt belang geweest in vergelijking met de directe verandering door de afsluiting. Dit blijkt uit fig. 2, waarop voor ~~de~~ stations aan de Waddenzee o.d. Harlingen de gemiddelde jaarlijkse H.W. standen aangegeven zijn. Zo hebben in 1932 en ook reeds in de loop van 1930 en 1931, de H.W. standen een belangrijke verhoging ondergaan als gevolg van de afsluiting. Na 1935

kan verdere toename niet meer waargenomen worden, terwijl deze tussen 1932 en 1935 ook belangrijk geringer is geweest dan tevoren.

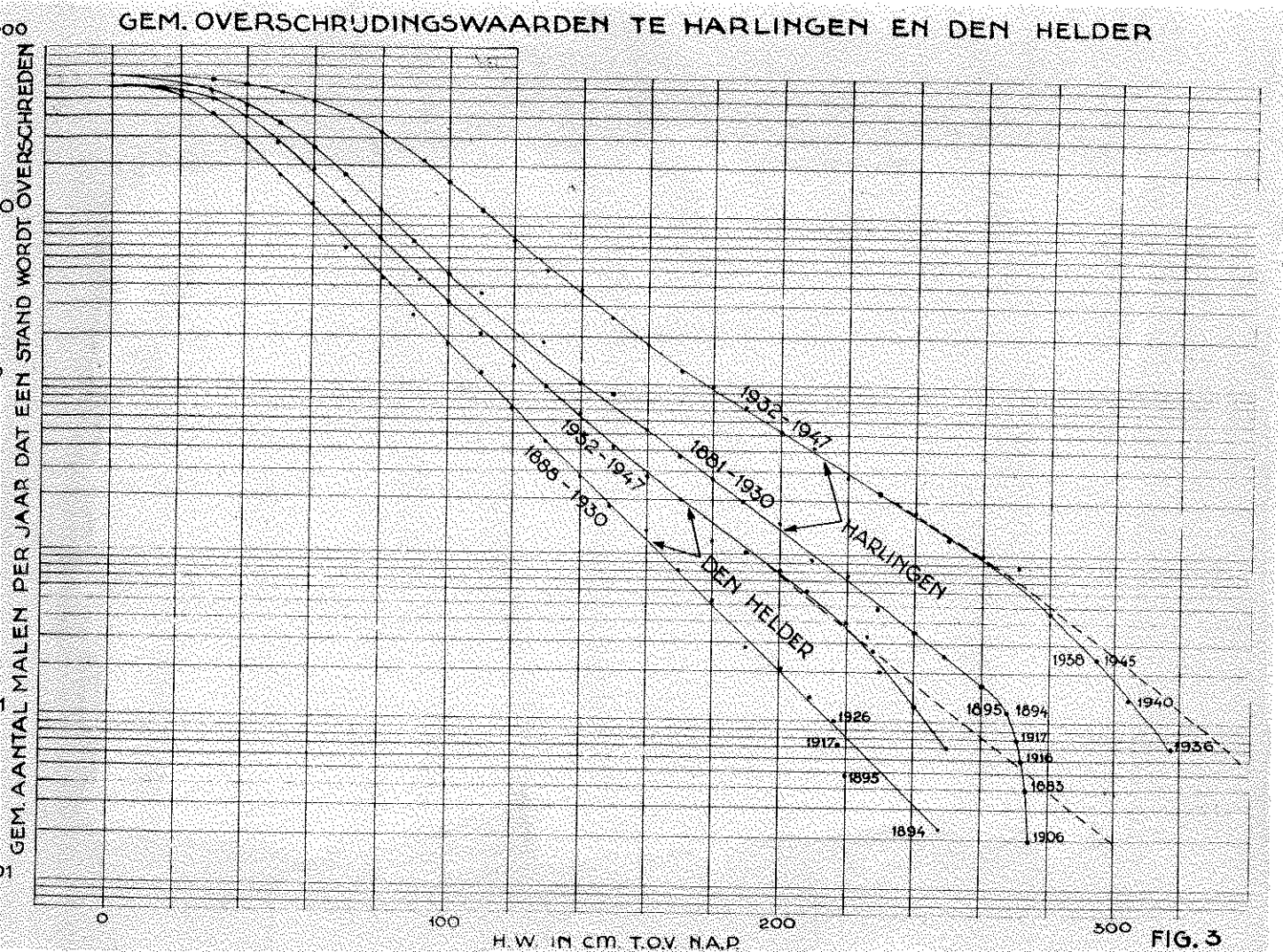


Aan de hand van de berekeningen werd vastgesteld, dat de gemiddelde H.W.standen te Den Helder, Den Oever en Harlingen (zie fig. 1) door de afsluiting van de Zuiderzee resp. zouden stijgen met 1 cm., 33 cm. en 21 cm.. De gemiddelde H.W.standen van deze plaatsen bedroegen vóór de afsluiting 0,4 m., 0,3 m. en 0,6 m. + N.A.P. en na afsluiting 0,48 m., 0,6 m. en 0,8 m. + N.A.P. zodat de verschillen volgens de metingen resp. 8 cm., 30 cm. en 20 cm. bedragen. Er is dus een goede overeenstemming tussen berekening en meting bij Den Oever en Harlingen. Betreffende Den Helder moet opgemerkt worden, dat de H.W.stand door de belangrijke ^{vorm}verandering ~~van~~ van de getijlijn in de omgeving van H.W. veel meer verandert is.

Betreffende de veranderingen die de stormvloedstanden door de afsluiting hebben ondergaan kan het volgende worden medegedeeld: In het jaar 1936 is de hoogste stormvloed voorgekomen na de afsluiting. De H.W.standen, die bij deze stormvloed zijn voorgekomen bedragen voor de bovengenoemde stations: Den Helder 2.28 m, Den Oever 2.95 m en Harlingen 3.20 m + N.A.P..

Deur hoge stormvloeden slechts zeldzaam optreden en de omstandigheden steeds wisselend zijn, is het moeilijk om een overeenkomstige stormvloed vóór de afsluiting te bepalen. Zulken stormvloed zou in elk geval dezelfde waarschijnlijkheid van optreden moeten bezitten.

Om deze waarschijnlijkheid te bepalen werden met behulp van de beschikbare waarnemingen zgn. overschrijdingskrommen opgesteld, zowel vóór als na de afsluiting. Onder de overschrijdingswaarde behorend bij een bepaald peil wordt dan verstaan het gemiddelde aantal H.W. standen per jaar, dat dat peil bereikt of overschrijdt. In figuur 3 zijn grafieken van deze overschrijdingswaarden aangegeven; de verticale schaal is dan logaritmisch (zie lit. 7).



Voor Den Helder is de genoemde overschrijdingskromme bepaald tot 1932, over een termijn van 42 jaren. Ze blijkt tot aan de hoogste stand vrijwel rechtlijnig te verlopen. Na de afsluiting kon de overschrijdingskromme over een periode van slechts 15 jaar bepaald worden, zodat deze vooral voor de hogere standen minder betrouwbaar zal zijn. Ze blijkt dan niet meer rechtlijnig te verlopen, vermoedelijk als gevolg van de te korte periode.

Evenzo werden de overeenkomstige overschrijdingskrommen voor Harlingen vastgesteld. Deze zijn zowel vóór als na de afsluiting gebogen, evenals de kromme voor Den Helder ná de afsluiting. Dit gebogen ver-

loop in Harlingen vóór de afsluiting is een gevolg van de invloed der Zuiderzee. Na de afsluiting is de invloed van de Zuiderzee verdwenen en het gebogen verloop te Harlingen is dan analoog aan dat te Den Helder.

Dit heeft tot gevolg, dat de toename van de H.W.standen der stormvloed, bepaald volgens gelijke overschrijdingswaarden vóór en na de afsluiting, na deze afsluiting geringer is, dan bij rechtlijnig verloop van de overschrijdingskromme na de afsluiting te Den Helder het geval zou zijn. Zou echter deze overschrijdingskromme te Den Helder, na 1932 toch ongeveer als rechtlijnig worden aangenomen, dan zou de overschrijdingskromme van Harlingen eveneens nagenoeg rechtlijnig worden. Bij deze aanname blijkt er goede overeenstemming te zijn met de verandering der H.W.standen zoals ze door de berekeningen bepaald werden (zie fig. 3).

Hoogwaterstanden hoger dan van de hoogst voorgekomen stormvloed bezitten geen overschrijdingswaarden en boven dat peil kan dus de kromme niet meer uit de waarnemingen worden afgeleid. De overschrijdingswaarde van deze hoogste stand na de afsluiting bedraagt volgens definitie 1 op de 15 jaar. Voor de gecorrigeerde kromme te Harlingen zal dit overeenkomen met een peil van $\pm 3.30 \text{ m} + \text{N.A.P.}$. Bij de periode vóór de afsluiting is de bepaalde overschrijdingskromme echter betrouwbaarder. Wordt ook van deze kromme het peil met een overschrijdingswaarde van $1/15$ bepaald, dan wordt $\pm 2,70 \text{ m}$ gevonden. Er is dus vóór en na de afsluiting een verschil van 60 cm. bij de stormvloed, die een overschrijdingswaarde van $1/15$ heeft. Deze uitkomst is vanzelfsprekend zeer betrekkelijk. Worden bijv. de peilen bepaald voor de overschrijdingswaarden van 1 op 5 jaar, dan wordt voor en na de afsluiting een verschil van $\pm 50 \text{ cm.}$ gevonden.

Door de Staatscommissie Zuiderzee echter werd de voortplanting van de stormvloed van 1894 in het bijzonder berekend, zowel bij open als gesloten Zuiderzee. Deze stormvloed had te Harlingen een gemiddelde overschrijdingswaarde van $\pm 0,1$ per jaar.

Wordt nu met behulp van de overschrijdingskrommen de equivalente waterstand bepaald na de afsluiting, dan wordt een stand gevonden, die volgens de rechtlijnige extrapolatie te Den Helder (zie voorgaande) $\pm 55 \text{ cm.}$ hoger is gelegen dan vóór de afsluiting.

Uit de berekeningen volgde, in verband met de aanwezige onzekerheden, dat de verhoging van het peil in Harlingen tussen 45 en 60 cm.

zou bedragen, nagenoeg in overeenstemming met de hiervoren afgeleide waarden van 55 cm. en 60 cm.

Een der berekeningen gaf bijv. de preciese waarde van 57 cm..

De eindconclusie kan dus luiden, dat de resultaten der getijberekening voor gemiddelde toestand na de afsluiting der Zuiderzee in goede overeenstemming zijn met de gemeten waarden.

Betreffende de stormvloed is er ook voldoende overeenstemming, maar dan moet de restrictie gemaakt worden, dat de frequenties van de voorgekomen stormvloeden na de afsluiting, wegens de korte waarnemingsperiode van 15 jaar, nog onzeker kunnen zijn.

§2. Berekening van het M_2 getij voor een begrensde geulenstelsel, volgens de methode Lorentz.

Nadat gunstige resultaten met behulp van de berekeningen van de Staatscommissie Zuiderzee (zie lit. 1) verkregen waren, werden de methoden van deze Commissie ook toegepast om de waterbeweging op andere rivieren en rivierenstelsels van het Nederlandse gebied te bestuderen. Hierbij was dan weer het speciale doel om veranderingen in de getijbeweging te bepalen indien wijzigingen in de waterlopen worden aangebracht, zoals het veranderen van het profiel (verdieping, verbreding enz.), het afsluiten van bepaalde waterwegen of het tot stand brengen van nieuwe verbindingen.

Het bleek dan echter noodzakelijk om de methoden van getijberekening, zoals ze voor de Zuiderzee waren toegepast, uit te breiden. Hierover zal in de volgende paragrafen de hoofdzaken worden medegedeeld. Voor de volledigheid en duidelijkheid wordt eerst in het kort de methode der Staatscommissie Lorentz geschetst.

Zoals bekend kan de getijgolf volgens de theorie der harmonische analyse ontbonden worden in een aantal sinusoidale golven, waarvan de perioden afhankelijk zijn van de bewegingen van zon en maan. De getijbeweging wordt opgewekt door de krachten die deze hemellichamen uitoefenen op de watermassa's der aarde.

Voor de Nederlandse kust is de belangrijkste componente het sinusoidale zgn. M_2 getij; ze is een gevolg van de werking der maan op de watermassa. Globaal wordt ± 80 % van het getij langs deze kust door het M_2 getij beheerst en het ligt dus voor de hand om de voortplanting van dit M_2 getij op zichzelf te beschouwen in de veronderstelling, dat de voortplanting van het werkelijke getij hiervan slechts weinig zal verschillen.

Deze veronderstelling werd ook gemaakt bij de bepaling van de voortplanting van het getij na afsluiting van de Zuiderzee.

Het verloop van de waterspiegel van het M_2 getij t.o.v. de gemiddelde waterstand, wordt bepaald door:

$$(1) \quad h = h_2(x) \cos(nt - k_2(x))$$

en de stroomsnelheid door:

$$(2) \quad v = v_2(x) \cos(nt - \psi_2(x))$$

Het doel van de getijberekening is om de functies $h_2(x)$, $k_2(x)$, $v_2(x)$ en $\psi_2(x)$ te bepalen.

Zoals bekend wordt de voortplanting van het getij ^{o.g.} bepaald door

de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking.

Van deze vergelijkingen wordt een éénduidige oplossing verkregen, indien voldoende randvoorwaarden gegeven zijn.

De bewegingsvergelijking luidt:

$$(3) \quad \frac{1}{g} \frac{\overset{(a)}{\partial v}}{\partial t} = - \frac{\overset{(b)}{\partial h}}{\partial x} - \frac{\overset{(c)}{|v|} v}{c^2 z}$$

Hierin is t de tijd en x de coördinaat langs de geul in zee- waartse richting.

Door h wordt de hoogte aangegeven t.o.v. een horizontaal vlak en door z de diepte van de geul. De grootheid C is de coëfficiënt van Eytelwein (Chézy), terwijl $|v|$ wil zeggen, dat steeds voor deze v de positieve waarde wordt genomen.

In deze vergelijking is (a) het versnellingsverhang, (b) het verhang van de waterspiegel en (c) het weerstandsverhang. Verder wordt de ebstroom als positief aangenomen.

Wordt verder de totale stroom door een dwarsprofiel q genoemd en b de breedte van de geul, dan is

$$(4) \quad q = b z v$$

Wordt in plaats van v , q ingevoerd, dan gaat (3) over in:

$$(5) \quad \frac{1}{g b z} \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{|q| q}{c^2 b^2 z^3}$$

Bij deze herleiding is de term met $\frac{\partial z}{\partial t}$ verwaarloosd, daar ze van ondergeschikt belang blijkt te zijn t.o.v. de andere termen.

De continuïteitsvergelijking luidt:

$$(6) \quad \frac{\partial q}{\partial x} = - B \frac{\partial h}{\partial t}$$

Hierin is B de bergende breedte, die verschillend kan zijn van de stroombreedte b .

De hiervorengenoemde functie $h(x, t)$ en de functie

$$(2^1) \quad q(x, t) = q_2(x) \cos(nt - \psi_2(x))$$

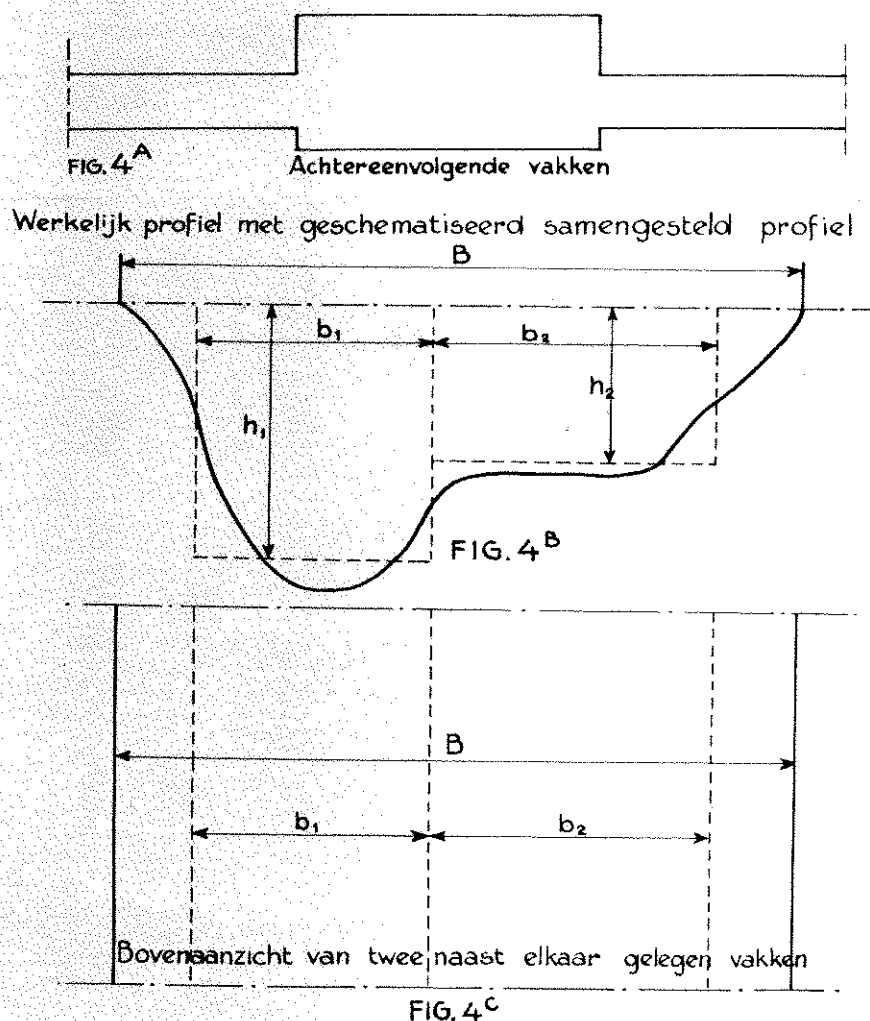
zullen zo moeten worden bepaald, dat ze tezamen het verticale en horizontale M_2 getij weergeven. Dan is het echter noodzakelijk om uit de bewegingsvergelijking (5) een lineaire partiele differentiaalvergelijking af te leiden, zodanig dat ze met (6) de voortplanting van het M_2 getij bepaald.

Nu werd door de Staatscommissie Lorentz aangenomen, dat het getij zich voortplant in een kanaal met constante breedte en diepte, die

ter hoogte van de middenstand worden bepaald. Een geulenstelsel, dat min of meer willekeurig gevormd kan zijn, wordt dan verdeeld in een aantal vakken, die zo geschematiseerd worden, dat ieder gedurende het getij een constante diepte z en stroombreedte b verkrijgt; ook de kombergingsbreedte B wordt als constant aangenomen. Voor ieder vak worden dan de vergelijkingen (5) en (6) opgesteld, terwijl op de overgangen de voorwaarde geldt dat zowel het horizontale als het verticale getij van het ene naar het andere vak continu verloopt.

Ook kunnen verschillende vakken naast elkaar beschouwd worden.

In fig. 4, a, b, c is een voorbeeld aangegeven van de wijze van schematisatie van een bepaalde geul (zie ook hiervoor het in de aanvang geciteerde artikel van M. Thijsse).



De partiele differentiaalvergelijkingen alleen bepalen de getijbeweging niet op éénduidige wijze, want als het verticale getij aan de mond van de rivier verandert zal ook het getij op de rivier wijzigen. Aan de zeewaartse mond van de rivier zal dus het verticaal getij

gegeven moeten zijn. Dit is echter nog niet voldoende; in het geval van een rivier, die uit theoretisch oogpunt als oneindig lang moet worden beschouwd, moet bovendien de voorwaarde ingevoerd worden, dat het getij rivieropwaarts geleidelijk aan moet verdwijnen. Daarentegen zal in een gebied van beperkte omvang zonder bovendebiet de stroom gelijk aan nul moeten zijn aan de afgesloten uiteinden der geulen.

In deze paragraaf wordt alleen dit laatste geval behandeld.

Zijn de hierbij behorende randvoorwaarden gegeven, dan treedt bij de berekening van de functies $h(x,t)$ en $q(x,t)$ een ernstige moeilijkheid op. Het is nl. onmogelijk om deze functies (1) en (2') zo te bepalen dat ze aan (5) en (6) voldoen in verband met de ~~de~~ ^{term} ~~kwadratische~~ ⁱⁿ karakter van de weerstandskracht $\frac{g|q|q}{C^2 b^2 z^3}$. Zou deze term evenredig zijn met de eerste macht van de stroom dus bijv. gelijk aan $\frac{g m_1 q_2 q}{C^2 b^2 z^3}$

($m_1 = \text{constant}$), dan zou dit wel mogelijk zijn. Dan is, zoals in het voorgaande is aangegeven, de diepte z en de breedte b gedurende het getij constant aangenomen. Op de hierbovengenoemde gedachtengang voortgaande, werd door Prof. Lorentz de vergelijking (5) vervangen door (5¹).

$$(5^1) \quad \frac{1}{bz} \frac{\partial q}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g m_1 q_2 q}{C^2 b^2 z^3}$$

waarbij dan m_1 zo bepaald werd, dat de totale arbeid, verricht door de aangenomen lineaire wrijvingskracht $\frac{g m_1 q_2 q}{C^2 b^2 z^3}$, gedurende de gehele getijperiode gelijk is aan de totale arbeid verricht door de werkelijke wrijvingskracht $\frac{g|q|q}{C^2 b^2 z^3}$.

Dit blijkt het geval te zijn, als

$$(7) \quad m_1 = \frac{8}{3\pi}$$

Zoals in de volgende paragraaf wordt aangetoond, blijkt deze waarde van m_1 de noodzakelijke en voldoende voorwaarde te zijn opdat de voortplanting van het M_2 getij kan worden bepaald met behulp van (5¹) en (6).

Bij de berekeningen is het dan noodzakelijk om voor ieder vak de gemiddelde waarde van q_2 voorlopig te schatten, waarna een stelsel lineaire partiele differentiaalvergelijkingen moet worden opgelost, hetgeen op de bekende wijze met behulp van complexe functies kan geschieden. Is een stelsel oplossingen voor h en q verkregen, dan kan

de voorlopige schatting van q_2 gecontroleerd worden, waarna zo nodig aan de hand van de uitkomsten nieuwe schattingen kunnen worden gemaakt. Voor een meer gedetailleerde uiteenzetting van het bovenstaande wordt weer naar het artikel van M. Thijsse (zie lit. 2) verwezen.

§3. Berekening van de voortplanting van het M_2 getij op een rivier.

De oplossing van §2 kan echter niet gevolgd worden in het geval van getijbeweging op een rivier waarbij de bovenafvoer van belang is. Wel wordt in deze paragraaf aangenomen, dat het getij in voldoende mate kan worden benaderd door het M_2 getij.

Terwijl het verticale getij weer door (1) wordt voorgesteld, moet voor het horizontale getij in verband met het constante boven-debiet q_0 , worden gesteld:

$$(2') \quad q = q_0 + q_2(x) \cos(nt - \varphi_2(x))$$

Volgens de vorige paragraaf werd door Lorentz bij de berekening van het M_2 getij de tamelijk ingrijpende benadering ingevoerd dat voor het gehele getij de diepte z constant is.

In deze paragraaf zullen we echter veronderstellen dat de diepte met het verloop van het M_2 getij mede verandert. Dus stellen we:

$$(8) \quad z = z_0 + h_2 \cos(nt - k_2(x))$$

Zoals ook reeds in de vorige paragraaf behandeld is, moeten uit de differentiaalvergelijkingen (5) en (6) lineaire partiele differentiaalvergelijkingen worden afgeleid, zodanig dat ze de voortplanting van het M_2 getij bepalen. De onbekende functies van x , die in h en q voorkomen, moeten dan zo bepaald worden, dat (1) en (2') oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijkingen.

Het is dus weer de vraag hoe deze lineaire partiele differentiaalvergelijkingen moeten worden opgesteld. In het kort wordt nu de methode behandeld, welke door Dr. Ir. J.P. Mazure werd gegeven (zie lit. 5). Deze methode is van zuiver mathematisch karakter in tegenstelling met die van Lorentz.

Bij deze werkwijze wordt de factor $|q| q$, die in de weerstandsterm van de formule (5) voorkomt, vervangen door:

$q_2^2 m_0 + m_1 \cos(nt - \varphi_2)$, als $q_2 > q_0$ en dus de getijstroomamplitude groter is dan de opperwaterstroom. Indien echter $q_2 < q_0$ wordt voor $|q| q$ gesteld: $q_0^2 \left\{ m'_0 + m'_1 \cos(nt - \varphi_2) \right\}$

Hierin zijn m_0 en m_1 , m'_0 en m'_1 nader te bepalen coëfficiënten.

Vanuit mathematisch oogpunt beschouwd, komt dit hierop neer, dat de factor $|q| q$ van de weerstandsterm benaderd wordt door de eerste twee termen van een Fourierreeks. De verdere termen van deze Fourierreeks bezitten frequenties $2n$, $3n$ enz. en behoeven voor de voortplan-

ting van het M_2 getij niet te worden beschouwd.

Wordt $|q|$ kortheidshalve door $f(t)$ voorgesteld, dan is:

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt ; \quad m_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt - \varphi_2) dt$$

Bij de integratie treedt een moeilijkheid op vanwege de tekenwisseling op de tijdstippen waarvoor $q = 0$. Deze zijn echter gemakkelijk uit (2¹¹) te bepalen. Resp. voor de waarden $nt - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ en

$$\frac{3\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{zal } q = 0 \text{ zijn, waarbij } \sin \varepsilon = \frac{q_0}{q_2}$$

In verband met deze tekenwisseling zal

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} + \varepsilon} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}^{\frac{3\pi}{2} - \varepsilon} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{2} - \varepsilon}^{2\pi} f(t) dt.$$

$$\text{Dan is } f(t) = \left\{ q_0 + q_2 \cos(nt - \varphi_2) \right\}^2.$$

Voor m_1 geldt een analoge uitdrukking.

Na enige berekeningen kunnen dan voor m_0 en m_1 e.q. m'_0 en m'_1 exacte formules bepaald worden.

In verband met haar ingewikkeldheid worden voor m_0 en m_1 meer eenvoudige, maar benaderde formules gegeven.

Voor $q_0 \ll q_2$ is bij benadering:

$$(9) \quad \begin{aligned} m_0 &= 1,45 \frac{q_0}{q_2} \\ m_1 &= 0,86 + 1,1 \frac{q_0}{q_2} \end{aligned}$$

Voor $q_0 \gg q_2$ geldt daarentegen exact:

$$(10) \quad \begin{aligned} m_0 &= 1 + 0,5 \frac{q_2}{q_0} \\ m_1 &= 2 \frac{q_2}{q_0} \end{aligned}$$

Opgemerkt wordt, dat bij afwezigheid van opperwaterafvoer alleen de formules (9) ter sprake komen. Dan is $m_0 = 0$ en $m_1 = 0,86$. De exacte formule voor m_1 leidt dan tot de waarde $\frac{8}{3\pi}$, die ook in § 2 is afgeleid. Hiermede is tevens aangetoond, dat deze waarde voor m_1 ook noodzakelijk is voor de bepaling van de voortplanting van het M_2 getij bij afwezigheid van opperwaterafvoer.

Nu wordt als volgt een der beide lineaire partiele differentiaalvergelijkingen voor de voortplanting van het M_2 getij op een rivier

afgeleid. Tevens wordt dan de vergelijking gevonden, die de verandering van de middenstand bepaalt.

Voor het quotient $\frac{q}{z^3}$ wordt gesteld:

$$\frac{-2}{z_0^3} \left\{ m_0 + m_1 \cos(nt - \varphi_2) \right\} \left\{ 1 - 3 \frac{h_2}{z_0} \cos(nt - k_2) \right\} =$$

$$= \frac{-2}{z_0^3} \left\{ m_0 - \frac{3}{2} m_1 \frac{h_2}{z_0} \cos(k_2 - \varphi_2) + m_1 \cos(nt - \varphi_2) + \text{term met frequen-} \right.$$

tie $2 nt$. }

Hierin is de grootheid \bar{q} ingevoerd, die als volgt gedefinieerd wordt:

$$\bar{q} = q_2 \text{ als } q_0 \ll q_2 \text{ en } \bar{q} = q_0 \text{ als } q_0 \gg q_2.$$

In dit laatste geval moeten m_0 en m_1 vervangen worden door m'_0 en m'_1 .

Op analoge wijze worden de overige termen van (5) uitgedrukt in constante termen, termen met $\cos(nt - \varphi_2)$ en $\cos(nt - k_2)$.

Ten slotte worden de volgende vergelijkingen gevonden:

(a)
$$h_m = - w_m m_0 \bar{q}^{-2} + \frac{3}{2} \frac{w_m m_1 h_2}{z_0} \bar{q}^{-2} \cos(k_2 - \varphi_2) +$$

(b)
$$\frac{\partial h}{\partial x} = - p_m \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{3}{z_0} w_m m_0 h_2 \bar{q}^{-2} \cos(nt - k_2) - w_m m_1 \bar{q}^{-2} \cos(nt - \varphi_2)$$

waarin $w_m = \frac{1}{c^2 b^2 z_0^3}$ en $p_m = \frac{1}{gbz_0}$ is.

Nu geeft (11a) de verandering van de middenstand aan op de rivier als gevolg van het getij en de opperwaterafvoer. De betrekking (11b) kan verder worden herleid tot een partiële differentiaalvergelijking voor het M_2 getij. Dan moeten de functies h en q weer worden ingevoerd. resp. bepaald door (1) en $q = q_2 \cos(nt - \frac{\pi}{2})$. (2')

Na enige herleiding wordt dan gevonden:

(12)
$$\frac{\partial h}{\partial x} = - p_m \frac{\partial q}{\partial t} - w_m m_1 \frac{\bar{q}^{-2}}{q_2} q + \frac{3w_m m_0}{z_0} \bar{q}^{-2} h$$

Zodra $q_0 > q_2$ is en dus $\bar{q} = q_0$, moeten m_0 en m_1 weer vervangen worden door m'_0 en m'_1 .

Zoals direct blijkt, heeft de continuïteitsvergelijking voor het M_2 getij dezelfde vorm als (6). Tezamen met (12) bepaalt ze de voort-

planting van het M_2 getij.

Opgemerkt wordt dat (11a) ook kan worden opgesteld voor een geulenstelsel zonder opperwaterafvoer als in § 2 is behandeld. Het middenstandsverhang zal dan echter vaak van weinig belang zijn. Zo bleek de verandering der middenstand na de afsluiting van de Zuiderzee gering te zijn, ze werd verder buiten beschouwing gelaten.

De berekening van de functies h en q als oplossing van de hiervoor afgeleide lineaire differentiaalvergelijkingen (6) en (12), kan evenals voor het geval van § 2 met behulp van complexe functies geschieden.

De getijgolf, zoals die wordt bepaald door middel van complexe functies, is de algebraïsche som van twee termen, die ieder als een sinusoidal lopende golf kunnen worden opgevat. Deze golven planten zich in verschillende richting voort met verschillende voortplantingssnelheid. De golf, die zich rivieropwaarts voortplant en dus tegengesteld aan de snelheid van het bovenwater, heeft een geringere voortplantingssnelheid, dan die welke zich rivierafwaarts beweegt.

De behandelde methode blijkt de voortplanting van het M_2 getij goed weer te geven, zoals uit een voorbeeld van Dr. Mazure blijkt (zie lit. 5).

Dit voorbeeld betreft de getijbeweging op de Lek, nl. het benedenste deel van de tweede Rijntak (zie fig. 1).

In het hiervolgende staatje worden de gemeten en berekende waarden voor amplitude en fase van het M_2 getij benevens de middenstanden voor verschillende peilschaalstations langs de Lek gegeven, opgegeven.

Plaats	Afstand in km. vanaf voorafgaande plaats	waarde amplitude h_2 en hoek k_2 van het M_2 getij				middenstand	
		gemeten		berekend		gemeten + N.A.P.	berekend + N.A.P.
		h_2	k_2	h_2	k_2		
Krimpen a/d Lek	0,	0,76 m	232°	0,76 m	232°	+0,26 m	+ 0,26 m
Reefkerk	8,9	0,69 m	247°	0,71 m	244°	+0,34 m	+ 0,36 m
Hoornhoven	8,2	0,59 m	262°	0,65 m	258°	+0,45 m	+ 0,47 m
Wassveld	10,9	-	-	0,51 m	282°	-	+ 0,67 m
Reeswijk	10,3	0,36 m	316°	0,35 m	310°	+0,94 m	+ 0,90 m
Willemborg	10,7	0,16 m	360°	0,17 m	352°	+1,42 m	+ 1,41 m

Bij de berekening is het verticale getij te Krimpen a/d Lek als gegeven beschouwd. Voor de rivieropwaarts gelegen plaatsen is er dan goede overeenstemming tussen berekening en meting.

Tenslotte vermelden we nog in het kort van welke factoren de verandering van de amplitude van dit M_2 getij afhankelijk is (zie lit.8) Op eenvoudige wijze kan nl. uit de partiele differentiaalvergelijking (12) gewone differentiaalvergelijkingen worden afgeleid. Daartoe substitueren we in (12) resp. $nt = k(x)$ en $nt = k(x) + \frac{\pi}{2}$ en vinden dan:

$$(13) \quad \frac{dh_2}{dx} = -p_m q_2 \sin(k_2 - \varphi_2) + m_1 w_m q_2^2 \cos(k_2 - \varphi_2) - m_0 w_m h_2 q_2^2$$

$$(14) \quad \frac{dk_2}{dx} = -p_m \frac{q_2}{h_2} \cos(k_2 - \varphi_2) - m_1 w_m q_2^2 \sin(k_2 - \varphi_2)$$

We beschouwen nu een vak met lengte x , dat voldoende kort is, opdat de grootheden van het linkerlid van (13) slechts weinig variëren en dus de gemiddelde waarden op dit vak kunnen worden aangenomen. Dan geldt bij benadering als h_2 en \bar{h}_2 resp. de amplituden aan het begin en einde van het vak zijn:

$$(15) \quad \bar{h}_2 = h_2 - p_m q_2 \sin(k_2 - \varphi_2) + m_1 w_m q_2^2 \cos(k_2 - \varphi_2) + \quad (C_1) \\ - m_0 w_m h_2 q_2^2 \quad (C_2)$$

Hierin blijkt de term (b) met de versnelling samen te hangen en (c₁) en (c₂) met de weerstand, waarbij (c₂) in het bijzonder afhankelijk is van de verandering der diepte z gedurende het getij.

Op de Nederlandse rivieren is de term (c₁) veel belangrijker dan de term (b). De waarde van deze laatste is ± 25% van die van (c₁). Verder blijkt rivieropwaarts gaande, (c₂) steeds meer in betekenis toe te nemen t.o.v. (c₁).

Verder valt het op, dat de hoek $(k_2 - \varphi_2)$, die het verschil in phase tussen horizontaal en verticaal getij aangeeft, van grote invloed is op de verandering van het getij. Bij de getijbeweging op de Nederlandse enkelvoudige rivieren als Lek, Waal en Maas blijken deze hoeken nagenoeg constant te zijn en ongeveer 123° te bedragen.

Het is ook eenvoudig om een gewone differentiaalvergelijking af te leiden voor de verandering van deze hoek: $\frac{dk_2}{dx}$ is in (14)

aangegeven en $\frac{d\varphi_2}{dx}$ is uit de continuïteitsvergelijking af te leiden,

door voor nt , $\varphi_2 + \frac{\pi}{2}$ te substitueren.

Daarna wordt onmiddellijk de formule gevonden voor $\frac{d(k_2 - \varphi_2)}{dx}$

Wordt echter in (6) $nt = \varphi_2$ gesteld, dan wordt een uitdrukking gevonden voor de verandering van de stroomamplitude:

$$(16) \quad \frac{dq_2}{dx} = -Bnh_2 \sin(k_2 - \varphi_2).$$

§4. De betekenis van het M_4 getij en haar berekening.

In de voorgaande paragrafen is verondersteld, dat het maansgetij M_2 in voldoende mate het getij benadert. Op de Nederlandse rivieren zijn de H.W. standen dan ook niet in belangrijke mate afwijkend van die van het M_2 getij. Vooral als de veranderingen van deze H.W.standen moeten worden berekend, is de veronderstelling gerechtvaardigd, dat deze nagenoeg gelijk zijn aan de veranderingen der H.W. standen van het M_2 getij. Dit is ook voor het geval van de afsluiting van de Zuiderzee juist gebleken (zie §1.)

De stromen van het M_2 getij kunnen echter veel meer afwijken van die van het werkelijke getij; verschillen tot 40 % zijn mogelijk, speciaal voor de vloedstromen. (zie lit. 8,9)

Een nauwkeuriger benadering van het getij zal moeten worden aangenomen, als de stroomsnelheden bijv. tot op 10 % nauwkeurig moeten worden berekend. Dit geldt ook als de rivieren regelmatig gevormd zijn.

Indien echter alleen het doel is om veranderingen van snelheden te berekenen bij eenvoudige en weinig ingrijpende wijzigingen, zal ook voor het stroombeeld een benadering met het M_2 getij voldoende zijn.

De benaderingen, waarvan tot nu toe is uitgegaan, zijn:

- 1°. Het getij wordt benaderd met het M_2 getij.
- 2°. De kombergingsbreedte wordt gedurende het getij vaksgewijs als constant aangenomen.
- 3°. Over een bepaalde vaklengte l van de stroomgeul wordt voor het gehele getij een constante breedte gesteld. Voor de diepte daarentegen zijn de veranderingen als gevolg van het M_2 getij nog in rekening gebracht.

De beide eerstgenoemde factoren zijn practisch van het meeste belang: ~~weinig~~ voor de bepaling der stroomsnelheden.

Bij regelmatig verlopende rivieren zoals de Nederlandse Benedenrivieren, zal bij een voldoende kleine vaklengte aan de veronderstellingen onder 2e en 3e genoemd, voldaan zijn. In het geval van zeearmen met een geulenstelsel en een uitgestrekt bankengebied dat gedurende het getij onderloopt, zal vooral aan de 2e voorwaarde slechts zeer gedeeltelijk voldaan zijn.

Toch is het ook dan vaak mogelijk om de H.W.standen met de hiervoor genoemde benaderingen voldoende nauwkeurig te berekenen

doch

doch dit is niet meer het geval met de stromen.

In het navolgende worden nu drie methoden voor nauwkeuriger getijberekening behandeld.

In deze paragraaf wordt ~~met~~ een nauwkeuriger weergave van het getij beschouwd, door behalve het M_2 getij ook het M_4 getij te berekenen (zie lit. 8 en 9).

In de volgende paragrafen worden de beide andere nauwkeuriger methoden van getijberekening behandeld.

De veronderstellingen onder 2e en 3e genoemd, blijven in deze paragraaf echter voorlopig gelden.

Volgens de methode der harmonische analyse kan het werkelijke getij worden voorgesteld als de algebraïsche som van een reeks sinusoidale getijden waarvan de frequenties afhankelijk zijn van de periodiciteiten van bepaalde elementen, die de beweging van zon en maan bepalen. Het blijkt, dat deze frequenties hoofdzakelijk in drie groepen kunnen worden ingedeeld. De belangrijkste groep zijn de frequenties, die ongeveer gelijk zijn aan de frequentie van het maansgetij M_2 met ^{een periode van} 12 uur 25 min. Hiertoe behoort bijv. het dubbel-daagse zonsgetij S_2 met een periode van 12 uur.

Verdere frequenties, die niet al te veel afwijken van het M_4 getij met een periode van 6 uur 12½ min. en tenslotte nog getijden met een periode van ongeveer een dag. ($T = 24 \text{ à } 25$ uur). Deze laatste groep is op de Nederlandse getijwateren van weinig belang.

Het getij, dat op een bepaalde dag wordt waargenomen, wordt nu voorgesteld, als de algebraïsche som van een reeks sinusoidale getijden met perioden van 24 uur, 50 min., 12 uur 25 min. en 6 uur 12½ min. Wordt afgezien van het enkeldaagse getij dan kan de getijbeweging dus benaderd worden met de volgende Fourierreeks:

$$(17) h = h_0 + h_2 \cos(nt - k_2) + h_4 \cos(2nt - 2k_4) + \dots$$

n = frequentie van het M_2 getij = $1,405 \cdot 10^{-4}$ zie als voorbeeld fig. 6

Vanzelfsprekend zijn h_2 en h_4 niet geheel identiek met de amplituden van het M_2 en M_4 getij, zoals die volgens de methode der harmonische analyse gevonden worden. In verband hiermede worden

$\bar{h} = h_2 \cos(nt - k_2)$ en $\bar{H} = h_4 \cos(2nt - 2k_4)$ het dagelijkse M_2 resp. M_4 getij genoemd, waarbij dan voor verschillende dagen andere

waarden

waarden voor h_2 en h_4 genomen moeten worden.

De stroom $q(t)$ wordt nu voorgesteld door:

$$(18) \quad q = q_0 + q_2 \cos(nt - \varphi_2) + q_4 \cos(2nt - 2\varphi_4)$$

De voortplanting van het M_2 en M_4 getij moeten dan afzonderlijk berekend worden.

In § 2 en § 3 is de methode van berekening van de voortplanting van het M_2 getij h nader behandeld, evenals het verloop van de middenstand h_0 als functie van x .

Zoals reeds in het voorgaande is gezegd worden de resultaten van de getijberekening speciaal betreffende de uitkomsten der stromen, aanzienlijk verbeterd, indien ook het M_4 getij in de berekeningen wordt opgenomen. Immers volgens de continuïteitsvergelijking (zie (6)), wordt gevonden:

$$(19) \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -B h_2 n \sin(nt - k_2) - 2B h_4 n \sin(2nt - 2k_4)$$

Op de Nederlandse rivieren bedraagt de amplitude van het M_4 getij gemiddeld ongeveer 15% van het M_2 getij, terwijl de corresponderende maximale stroom, door de factor 2 in (19) ongeveer 30% zal bedragen van de maximum stroom van het M_2 getij. Om tot deze conclusie te komen is het nodig om (19) voor de totale getijbeweging naar x te integreren. Daar echter blijkens de ervaring voor de gehele rivier de verhouding tussen M_2 en M_4 amplitude steeds ongeveer 15% à 20% bedraagt, volgt de voorgaande conclusie direct.

[Het zou hier te ver voeren om op de berekening van het M_4 getij uitvoering in te gaan, slechts de algemene gang van zaken wordt uiteengezet. Bij de voortplanting van het getij zullen het M_2 en M_4 getij elkaar wederkerig beïnvloeden als gevolg van de quadratische weerstand in de bewegingsvergelijking. Indien aan de mond van de rivier het verticale getij geheel identiek is met het M_2 getij, zal bij de voortplanting toch een M_4 getij ontstaan. In de leerboeken wordt het M_4 getij vaak het ondiepwatergetij genoemd in dien zin, dat voor een ondiepe rivier het M_4 getij van meer betekenis is dan voor een diepe rivier. Dit feit wordt ook door de berekeningen betreffende het M_4 getij bevestigd. Het blijkt dat bij de voortplanting van het M_2 getij tevens een M_4 getij ontstaat,

dat

dat in belangrijke mate afhankelijk is van de diepte van de rivier.

Betreffende de berekening van het M_4 getij wordt het volgende opgemerkt. Zoals in § 2 en § 3 werd aangetoond, wordt voor de opstelling van de formule van het M_2 getij o.a. de weerstandsterm van de bewegingsvergelijking in een Fourierreeks ontwikkeld. Voor de berekening van het M_4 getij moet deze Fourierontwikkeling worden uitgebreid met de termen van de frequentie $2nt$ (zie § 3)

$$(20) |q| q = \bar{q}^2 \left\{ \bar{m}_0 + \bar{m}_1 q_2 \cos(nt - \varphi_2) + \bar{m}_2 q_4 \cos(2nt - 2\varphi_4) \right\}$$

Op overeenkomstige wijze als m_0 en m_1 worden dan de coëfficiënten \bar{m}_0 , \bar{m}_1 en \bar{m}_2 berekend. Het verschil van m_1 en \bar{m}_1 , geeft de invloed aan, die het M_4 getij op het M_2 getij uitoefent enz.

Bij deze berekeningen treedt een ernstige moeilijkheid op doordat bij de integraties ter bepaling van de Fouriercoëfficiënten (zie § 3) de waarden waarvoor $q = 0$, nl. $nt_1 = \epsilon_1$ en $nt_2 = \epsilon_2$ moeten worden bepaald.

Bij de getijbeweging op de Nederlandse rivieren blijkt het echter mogelijk bij benadering voor ϵ_1 en ϵ_2 dezelfde waarden aan te houden als in § 3 bij de berekening van het M_2 getij. Dan moet de M_4 amplitude van de stroom bijv. hoogstens 50 % bedragen van de M_2 amplitude. Is dit het geval dan kunnen de integralen voor de berekening van \bar{m}_0 , \bar{m}_1 en \bar{m}_2 op overeenkomstige wijze als in § 3 is aangegeven, direct worden berekend, (zie lit. 8).

De grootheden \bar{m} kunnen echter ook op een geheel andere wijze bepaald worden:

De functie $f(t) = |q| q$, wordt dan benaderd door een machtreeks naar q , (zie lit. 8). De coëfficiënten in deze machtreeks worden daarbij zodanig bepaald, dat in een voldoende groot interval een voldoende nauwkeurige benadering van de functie $|q| q$ verkregen wordt. Daarna wordt in die machtreeks q door (18) vervangen en vervolgens uitgewerkt tot een uitdrukking van de vorm $p_0 + q_2 \cos(nt - \varphi_2) + q_1' \cos(nt - \alpha) + q_4 \cos(2nt - 2\varphi_4) + q_4' \cos(2nt - \beta)$ enz. Dan is dus de quadratische term $|q| q$ in een som van goniometrische functies uitgedrukt.

Op overeenkomstige wijze als in § 3 is weergegeven, kunnen de overige termen van de bewegingsvergelijking (5) in een som van Fouriertermen worden ontwikkeld. Uiteindelijk wordt de vergelijking, die uit deze bewegingsvergelijking is afgeleid, gesplitst in drie

nieuwe

nieuwe betrekkingen, resp. gevormd door van t onafhankelijke termen, termen met de frequentie nt (M_2 getij) en termen met de frequentie $2nt$ (M_4 getij).

Dit geschiedt ook met de continuïteitsvergelijking, zodat tenslotte zowel voor het M_2 als M_4 getij, twee vergelijkingen ontstaan, die weer tot lineaire partiele differentiaalvergelijkingen kunnen worden herleid, op de wijze als in § 3. voor het M_2 getij alleen is weergegeven.

Het blijkt mogelijk om de voorgaande methode nog verder uit te breiden door ook de benaderingen in 2^o en 3^o genoemd te verbeteren en resp. voor de stroombreedte en kombergingsbreedte te stellen:

$$b = b_0 + b_2 \cos(nt - \alpha_2) + b_4 \cos(2nt - \alpha_4)$$

$$B = B_0 + B_2 \cos(nt - \beta_2) + B_4 \cos(2nt - \beta_4)$$

Dan worden dus b en B afhankelijk van het getij gesteld. Het zal over het algemeen mogelijk blijken om b_4 en B_4 te verwaarlozen.

De genoemde functies voor b en B kunnen dan in (5) en (6) ingevoerd worden en op analoge manier als met de variabele diepte z is geschied in de berekeningen worden verwerkt. Het gevolg is echter, dat de uiteindelijke formules veel ingewikkelder worden en het rekenwerk belangrijk toeneemt. Deze weg zal alleen dan gevolgd worden, als dit voor het practisch doel atrikt nodig is, hetgeen o.e.a. kan blijken door de resultaten der berekeningen met de metingen te vergelijken.

Hierbij zal dan tevens onderzocht moeten worden in hoeverre het nodig is om aan de bewegingsvergelijking (5) nog meer termen toe te voegen, zoals bijv. een term van Bernoulli en dergelijke.

§5. Berekening van het getij in een onregelmatig geulenstelsel met behulp van reeksen.

In het voorgaande werd de methode van getijberekening behandeld die berust op de ontleding van het getij in een aantal sinusoidale golven. Bij een regelmatig gevormde rivier of rivierenstelsel zal deze methode de voorkeur verdienen. Bij onregelmatig gevormde rivieren kan echter de methode, die thans zal worden beschreven van voordeel zijn. Bij deze methode wordt het getij niet ontleed in partiele golven, maar in haar geheel genomen, terwijl tevens alle bepalende grootheden, als diepte, stroombreedte en kombergingsbreedte willekeurig variabel aangenomen kunnen worden. Verder worden alleen reële functies ingevoerd. (zie lit. 1, 3 en 9).

Laat aan de mond van de rivier het verticale getij $h(o,t)$ gegeven zijn en laat dit eveneens het geval zijn met de stroomkromme $q(o,t)$. Dan zijn de overeenkomstige functies op een plaats x van de rivier te berekenen met behulp van de volgende formules:

$$(21) \quad \bar{h} = h - w|q| q x - f \frac{dq}{dt} x + Bw |q| \frac{dh}{dt} x^2 + \frac{B^2 w}{3} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 x^3 + \frac{1}{2} f B \frac{d^2 h}{dt^2} x^2$$

$$(22) \quad \bar{q} = q - B \frac{dh}{dt} x + \frac{1}{2} B f \frac{d^2 q}{dt^2} x^2 + Bw |q| \frac{dq}{dt} x^2$$

Hierin is $w = \frac{1}{c^2 b^2 z^3}$; $f = \frac{1}{bz^2}$ terwijl $z(t)$ de gemiddelde

diepte op het tijdstip t van het vak (o,x) is.

De functies h en \bar{h} , die de hoogte van de waterspiegel voorstellen resp. aan begin en eind van het vak, zijn dan bepaald t.o.v. een bepaald horizontaal vlak. Evenzo is \bar{q} de waarde van de stroom aan het eind van het vak op het tijdstip t en q aan het begin van het vak.

Alle grootheden van de rechterleden van de formules (21) en (22) zijn dan bekend, waarbij zonedig $z(t)$ geschat moet worden uitgaande van de hoogte van de waterspiegel bij het begin van het vak. Na de eerste berekening van het verval $\bar{h}-h$, kan dan $z(t)$ gecorrigeerd worden met het halve verval.

De hierboven genoemde formules zijn benaderingsformules, die slechts voor een bepaalde vaklengte x in voldoende mate gelden, afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid.

De rivier moet daarom meestal in een aantal vakken verdeeld worden,

die

die ieder hoogstens een lengte l hebben.

De formules (21) en (22) kunnen als volgt worden afgeleid met een iteratiemethode.

We beschouwen weer de vergelijkingen (5) en (6)

$$(5) \quad \frac{dh}{dx} = -f \frac{dq}{dt} - w|q| \quad ; \quad (6) \quad \frac{dq}{dx} = -B \frac{dh}{dt}$$

Eerst substitueren we voor h en q in de rechterleden van (5) en (6) de aan het begin van het vak gegeven functies h_0 en q_0 die onafhankelijk van x zijn, dan geeft integratie naar x

$$(a) \quad h(x) = h_0 - f_0 \frac{dq_0}{dt} x - w_0 |q_0| q_0 x = h_0 + h_1$$

$$(b) \quad q(x) = q_0 - B \frac{dh_0}{dt} x = q_0 + q_1$$

Hierin zijn f_0 en w_0 de waarden, die f en w aan het begin van het vak hebben. Drie termen van de reeksen (21) en (22) zijn nu bepaald, waarbij dan de index 0 weggelaten is.

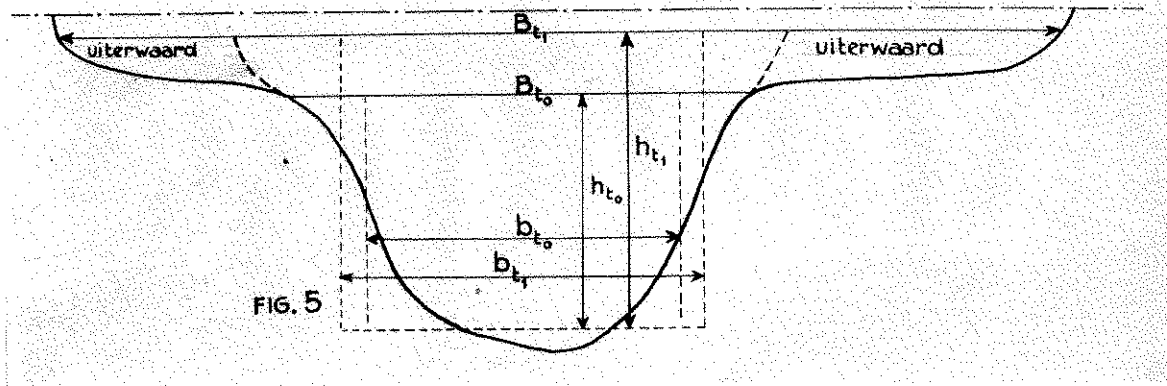
Daarna substitueren we (a) en (b) voor de functies h en q in de rechterleden van (5) en (6), dan gaan deze rechterleden over in bekend functies van x ; hierna wordt opnieuw naar x geïntegreerd.

Na deze integratie worden dan (21) en (22) geheel gevonden. Door deze functies opnieuw in de rechterleden van (5) en (6) te substitueren en daarna weer te integreren, worden zo voortgaande steeds nauwkeuriger benaderingen verkregen. Uit praktisch oogpunt zijn echter de functies (21) en (22) over het algemeen voldoende. In de eerste plaats is het wegens de variabele profielen nodig om de rivier in vakken te verdelen. In de tweede plaats zijn f en w ook afhankelijk van de diepte, die met het getij verandert. De wijze waarop de diepte op het vak verandert is weer met behulp van (21) te bepalen. Bij de berekening is het dan het eenvoudigst om de gemiddelde diepte van het vak op een bepaald moment te schatten en deze daarna te controleren. Hierbij kan dan een verschil van enkele cm's buiten beschouwing gelaten worden.

Zodra op een vak de functies w , f en B voldoende nauwkeurig bekend zijn, is de getijbeweging op de rivier te berekenen als aan de mond h en q gegeven zijn. Het is dan mogelijk, dat in de functies w en f ook de breedte b en de kombergingsbreedte B gedurende het getij varieert. Bij een niet al te lang vak zijn in het algemeen deze grootheden voldoende nauwkeurig bepaald door de hoogte van de waterspiegel van het riviervak gelijk te nemen aan die bij het begin van het vak. Het is één van de voordelen van deze methode, dat alle bepalende grootheden, b , B , en z gedurende het

het getij geheel willekeurig kunnen variëren. Daarvoor behoeft geen extra rekenwerk verricht te worden; de genoemde grootheden kunnen grafisch als functies van de waterstand zijn gegeven en voor ieder tijdstip wordt dan uit die grafiek de waarde afgelesen.

In fig. 5 is als voorbeeld weergegeven een profiel van een rivier met de schematisatie voor twee verschillende tijdstippen.



De berekening verloopt nu als volgt: Als aan de mond van de rivier h en q op ieder moment gegeven zijn en voor het eerste vak eveneens w , f en B , dan zijn in de rechterleden van de formules (21) en (22) alle termen bekend. Op bepaalde tijdstippen, bijv. om het uur, kunnen dan de corresponderende waarden voor h en q aan het einde van het vak berekend worden en daarna grafisch worden voorgesteld. Voor het volgende vak zijn dan weer voor ieder moment de grootheden van de rechterleden van (21) en (22) te bepalen. Zo voortgaande kan de getijbeweging van vak tot vak worden berekend en grafisch worden weergegeven.

Met behulp van meer gegevens, bijv. gemeten getijlijnen op andere plaatsen, kan gecontroleerd worden in hoeverre de berekeningen tot goede resultaten leiden. Immers de profielsgrootheden b , B , z en de coëfficiënt van Eytelwein C zijn voor onregelmatige rivieren slechts bij benadering te bepalen. Het is derhalve steeds noodzakelijk om voor de bestaande toestand de berekende getijbeweging te controleren aan de hand van de bekende gegevens.

Dit geldt overigens voor alle getijberekeningen, ook voor de lineaire methode.

Bij eventuele verschillen zullen de veronderstellingen betreffende de profielsgrootheden gecontroleerd moeten worden en eventueel

zo gewijzigd, dat voldoende nauwkeurige overeenstemming van de berekening met hetgeen van de waterbeweging in de rivier bekend is, bereikt wordt. Daarna kan met vertrouwen aangenomen worden, dat de getijberekening voor een gewijzigd rivierenstelsel voldoende juist zijn.

Een bezwaar van de in deze paragraaf geschetste methode is dat aan de mond van de rivier behalve het verticale getij ook de stroomkromme gegeven moet zijn. In het algemeen is het verticale getij wel bekend en zal de stroomkromme nader berekend moeten worden. Dit kan vaak geschieden met behulp van de overige getij gegevens, bijv. als het verticale getij ook nog op andere plaatsen gemeten is.

Worden echter veranderingen in het rivierenstelsel aangebracht, dan zijn geen voldoende getijgegevens voor de nieuwe toestand bekend en moet aanvankelijk de nieuwe stroomkromme aan de mond van de rivier geschat worden.

In bepaalde gevallen zijn de veranderingen van deze stroomkromme in de monde zonder veel moeite te schatten, bijv. als bepaalde kemberginggebieden worden afgesloten. Het kan echter nodig zijn om de hier beschreven methode te verbinden met een ~~profiel~~ lineaire methode, als bijv. in § 2 en § 3 is behandeld. In het algemeen zullen berekeningen met behulp van deze reeksen alleen uitgevoerd worden, indien de profielsgrootheden gedurende het getij sterk variabel zijn. Ook wordt de methode toegepast als bijv. voor een bestaande toestand, waarvan voor verschillende plaatsen het verticale getij bekend is, een nauwkeurige kennis van het verticale getij op andere plaatsen of van de stromen gewenst wordt.

Ten slotte is in fig. 6 het resultaat van een getijberekening met behulp van deze methode, grafisch voorgesteld. Dit voorbeeld betreft weer de getijbeweging op de Lek, waarbij van een gegeven getijlijn te Kripen is uitgegaan en de gemiddelde oppervlatafvoer van $440 \text{ m}^3/\text{sec}$.

Bovendien is in fig. 6 de ontwikkeling van de getijlijn te Kripen in M_2 en M_4 getij volgens Fourieranalyse, aangegeven.

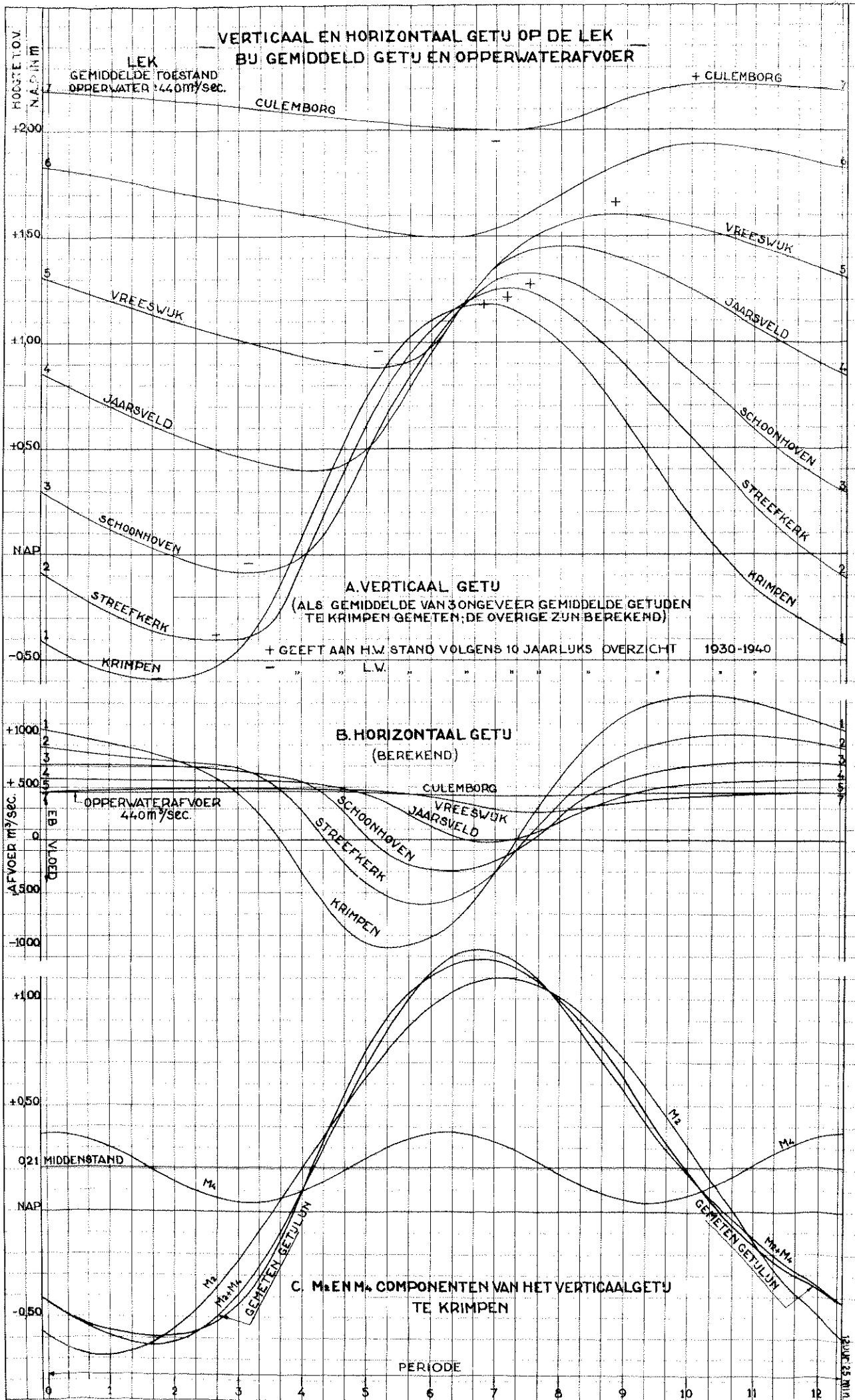


FIG. 6

§6. Integratie van de bewegingsvergelijkingen met behulp van karakteristieke golfcomponenten.

Sinds kort wordt bij de brekening van de getijvoortplanting een methode toegepast, die evenals de door M.H. Holsters gepubliceerde methode (zie lit. 12) op de theorie der zgn. karakteristieke functies bij hyperbolische partiele differentiaalvergelijkingen berust. In opzet en uitwerking wijkt de hier toegepaste methode evenwel in verschillende opzichten af.

Op de theoretische grondslagen zullen we hier niet ingaan; daarvoor wordt verwezen naar het proefschrift van Ir. J.C. Schönfeld (zie lit. 13). Van de praktische toepassing van de methode kan als volgt een indruk gegeven worden:

De differentiaalvergelijkingen voor een geul met een rechthoekig profiel, dat overigens nog van plaats tot plaats veranderlijk kan zijn, kunnen uit (5) en (6) worden afgeleid en in de vorm

$$(23) \quad z \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{zv}{b} \frac{db}{dx} = 0$$

$$(24) \quad g \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g i_r + g \frac{dh_b}{dx} = 0$$

gebracht worden, als we $h = z + h_0$ invoeren, waarin h_0 de hoogte van de bodem boven het nulvlak is. Verder stelt i_r het weerstandsverhang

$$i_r = \frac{|v| v}{C^2 z}$$

voor. De term van Bernoulli, $v \frac{\partial v}{\partial x}$, is niet verwaarloosd, omdat dit hier geen voordeel geeft en zelfsodeloze complicaties.

We voeren nu twee karakteristieke veranderlijken, f^+ en f^- in, die als volgt met z en v samenhangen:

$$f^+ = \sqrt{gz} + \frac{1}{2}v \quad f^- = \sqrt{gz} - \frac{1}{2}v.$$

Deze zijn zodanig gekozen, dat zij voldoen aan vergelijkingen van de vorm

$$(25) \quad \frac{\partial f^+}{\partial t} + c^+ \frac{\partial f^+}{\partial x} + a^+ = 0$$

$$(26) \quad \frac{\partial f^-}{\partial t} + c^- \frac{\partial f^-}{\partial x} + a^- = 0$$

Deze vergelijkingen zijn uit (5) en (6) af te leiden door (23) met $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{z}}$ en (24) met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen en daarna de vergelijkingen resp. op te tellen en af te trekken.

Voor de functies c^+ , c^- , a^+ en a^- moeten we dan nemen:

$$\frac{c^+}{c^-} = v \pm \sqrt{gz}$$

$$\frac{a^+}{a^-} = \frac{1}{2} \frac{v\sqrt{gz}}{b} \frac{db}{dx} \pm \frac{1}{2} g \left(i_r + \frac{dhb}{dx} \right)$$

We denken ons nu de golfbeweging der getijden ontbonden in twee karakteristieke golfcomponenten, daardoor gedefinieerd dat f^+ op iedere plaats en op ieder tijdstip de grootte van de ene golfcomponent voorstelt, en f^- de grootte van de andere. We zullen eerst de betekenis hiervan in een eenvoudig geval nagaan.

Bij invoeren van een gemiddelde diepte z_m en verwaarlozen van termen van de tweede orde, gaan f^+ en f^- over in

$$(27) \quad f^\pm = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{z_m}} (z - z_m) \pm \frac{1}{2} v + \sqrt{gz_m}$$

In dit geval zijn f^+ en f^- dus lineaire combinaties van het verticale getij $(z - z_m)$ en het horizontale getij v . De constante term gz_m in (27) is niet essentieel en zal worden weggelaten. De grootheden c^+ en c^- gaan nu over in

$$c^+ = -c^- = \sqrt{gz_m}$$

Bij verwaarlozing van de weerstand en de veranderingen in b en h_b is bovendien

$$a^+ = a^- = a$$

Daar nu c^+ en c^- constant zijn en a^+ en a^- gelijk aan nul, kan de algemene oplossing van (25) en (26) zoals reeds door d'Alembert is aangegeven, in een eenvoudige formule gebracht worden; deze is dan:

$$f^+ = \varphi(x - c^+ t) = \varphi(x - t \sqrt{gz_m})$$

$$f^- = \psi(x - c^- t) = \psi(x + t \sqrt{gz_m})$$

Hierin zijn φ en ψ functies die willekeurig gekozen kunnen worden.

Stellen we nu $\psi = 0$ en nemen we voor φ een cosinusfunctie, dan krijgen wij bijvoorbeeld:

$$f^+ = \sqrt{\frac{g}{z_m}} A_1 \cos w \left(t - \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_1 \right) \quad \text{en } f^- = 0$$

Hiervoor kan ook geschreven worden, in verband met $f^- = 0$,

$$z - z_m = \sqrt{\frac{z_m}{g}} v = A_1 \cos w \left(t - \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_1 \right)$$

Deze oplossing stelt een in positieve richting lopende sinusvormige golf voor.

Evenzo stelt

$$f^+ = 0 ; \quad f^- = \sqrt{\frac{g}{z_m}} A_2 \cos w\left(t + \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_2\right)$$

een in negatieve richting lopende golf voor, en hierin is

$$z - z_m = - \frac{z_m}{g} v = A_2 \cos w\left(t + \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_2\right)$$

Worden nu de beide lopende golven gesuperponeerd, dan vindt men

$$z - z_m = A_1 \cos w\left(t - \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_1\right) + A_2 \cos w\left(t + \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_2\right)$$

en

$$v = \sqrt{\frac{g}{z_m}} A_1 \cos w\left(t - \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_1\right) - \sqrt{\frac{g}{z_m}} A_2 \cos w\left(t + \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_2\right)$$

voor het verticale en horizontale getij, doch

$$f^+ = \sqrt{\frac{g}{z_m}} A_1 \cos w\left(t - \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_1\right)$$

$$f^- = \sqrt{\frac{g}{z_m}} A_2 \cos w\left(t + \frac{x}{\sqrt{gz_m}} + \alpha_2\right)$$

voor de beide golfcomponenten. De functie f^+ voor de samengestelde golf is dus dezelfde als voor de in positieve richting lopende golf. Evenzo is de functie f^- dezelfde als voor de in negatieve richting lopende golf. De functies f^+ en f^- zijn dus kenmerkend voor deze lopende golven, en in dit geval houden de karakteristieke golfcomponenten dus nauw verband met de lopende golven, waarin een willekeurige golfbeweging kan worden ontbonden. We kunnen de eerste golfcomponent de in positieve richting voortgeplante component, en de tweede de in negatieve richting voortgeplante component noemen.

In meer ingewikkelde gevallen kan een willekeurige golfbeweging lang niet altijd worden opgevat als het superpositieresultaat van twee lopende golven. De golfbeweging kan dan evenwel op de hiervoor beschreven wijze nog wel in karakteristieke golfcomponenten ontbonden worden.

Wij zullen nu nagaan hoe bijvoorbeeld in een enkelvoudige geul een getijberekening met behulp van die golfcomponenten kan worden uitgevoerd.

Wanneer we ons in een tijd dt verplaatsen over een afstand dx ,

dan zal f^+ daarbij veranderen met een bedrag

$$df^+ = \frac{\partial f^+}{\partial t} dt + \frac{\partial f^+}{\partial x} dx$$

Verplaatsen we ons juist met een snelheid c^+ , zodat $dx = c^+ dt$ is, dan volgt uit (25):

$$(28) \quad df^+ = -a^+ dt.$$

Evenzo is

$$(29) \quad df^- = -a^- dt,$$

wanneer we ons met de snelheid c^- verplaatsen. Bij de getijbeweging op de Nederlandse zee-armen en benedenrivieren is \sqrt{gz} steeds zoveel groter dan v , dat c^+ steeds positief en c^- steeds negatief is.

Laten nu in een geul de waarden van de grootheden, die de getijbeweging bepalen, voor een bepaald tijdstip t_1 langs de gehele geul als functies van x gegeven zijn. Dan zijn dus voor t_1 , z en v en dus ook f^+ en f^- als functies van x bekend, bijv. in de vorm van een grafiek (zie de krommen k_1 en l_1 in fig. 7a en fig. 7b).

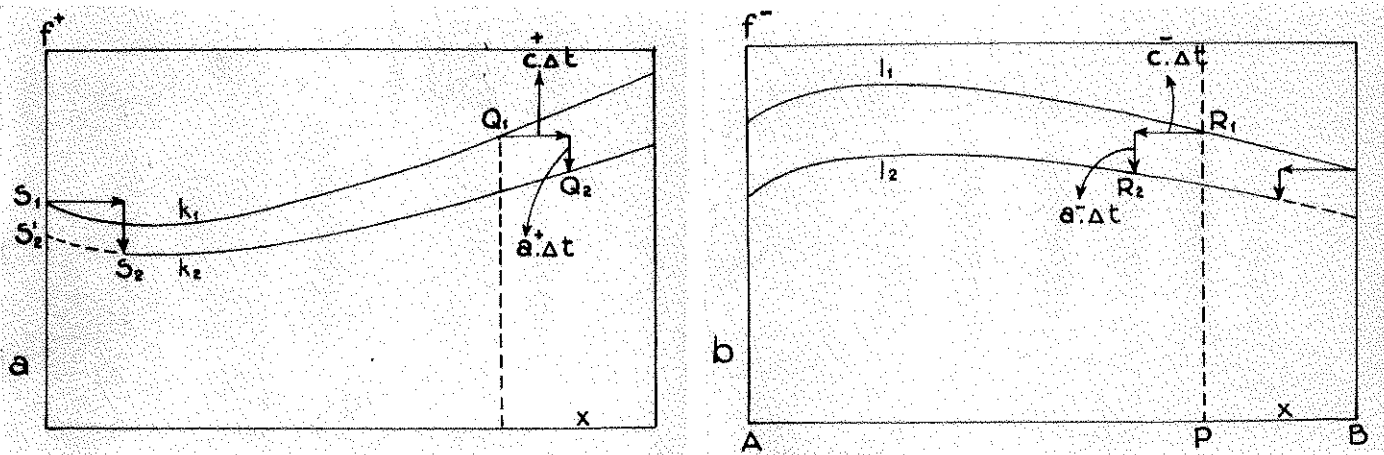


Fig 7 a-b

We geven in het kort aan hoe hieruit de getijbeweging op een tijdstip $t_2 = t_1 + \Delta t$ kan worden bepaald.

De waarden van f^+ en f^- in een willekeurig punt P van de geul op het tijdstip t_1 zijn aangegeven door de punten Q_1 en R_1 der

krommen k_1 en l_1 . Evenzo zijn c^+ , c^- , a^+ en a^- ter plaatse P op dit tijdstip bekend. Verplaatsen we ons nu van P uit met de snelheid c^+ , dus in de tijd Δt over de afstand $c^+ \Delta t$, dan zal f^+ volgens (28) met het bedrag $a^+ \Delta t$ afnemen. In verband hiermede verplaatsen we het punt Q_1 in fig. 7a over de afstand $c^+ \Delta t$ naar rechts en over de afstand $a^+ \Delta t$ naar beneden, waardoor het punt Q_2 gevonden wordt. Dit herhalen we voor een aantal punten van de kromme k_1 en zo vinden we een kromme k_2 , die het verloop van f^+ als functie van x voor t_2 aangeeft. Evenzo kan de kromme l_2 in fig. 7b gevonden worden door l_1 punt voor punt te verschuiven.

De verschuivingen van de punten van de kromme k_1 naar rechts geven de voortplanting in positieve richting van de eerste golfcomponent weer. De verschuivingen naar beneden (eventueel naar boven) geven de verzwakking (eventueel versterking) van die component weer. Op soortgelijke wijze worden de voortplanting in negatieve richting en de verzwakking (versterking) van de tweede golfcomponent weergegeven door de verschuivingen van de punten van de kromme l_1 .

Doordat alle punten van de kromme k_1 naar rechts verschoven worden is het meest linkse punt van k_2 dat we op deze wijze vinden, het punt S_2 (fig. 7a). Links van dit punt is de kromme k_2 dus niet uit k_1 af te leiden. Dit deel van de kromme moet dan worden afgeleid met behulp van een randvoorwaarde aan het uiteinde A van de geul. Uit deze randvoorwaarde voor t_2 , en uit de waarde van f^- voor t_2 , die wel bepaald kon worden, volgt dan de waarde van f^+ voor t_2 , dat wil zeggen het punt S_2 . De kromme k_2 kan nu van S_2 tot S_2 verlengd worden. Is bijvoorbeeld in A de diepte z als functie van de tijd aangegeven, dan kennen wij dus $z = z_2$ en $f^- = f_2^-$ voor $t = t_2$; hieruit kan dan met behulp van de formules voor f^+ en f^- worden afgeleid:

$$f^+ = f_2^+ = 2 \sqrt{g z_2} - f_2^- \text{ voor } t = t_2.$$

Op soortgelijke wijze is ook het meest rechtse deel van de kromme l_2 met behulp van een randvoorwaarde aan het uiteinde B te bepalen.

Dit proces kan herhaald worden uitgaande van de krommen k_2 en l_2 en zo kan de getijbeweging in kort opeenvolgende tijdstippen bepaald worden.

Het is van praktisch belang, dat een afwijking van de aangenomen uitgangstoestand k_1 , l_1 van de werkelijke uitgangstoestand, een invloed heeft op toestanden op latere tijdstippen, die geringer wordt naarmate die tijdstippen verder van het begintijdstip afliggen.

Hierdoor is het mogelijk ook bij gebrekkige kennis van de toestand k_1 . l_1 waarvan men uit wil gaan, toch nauwkeurige resultaten te verkrijgen voor toestanden enige tijd later. Een periodiek getij kan zodoende voldoende nauwkeurig bepaald worden door de berekening over meer dan een periode voort te zetten.

Een aanwijzing ervoor, dat men niet van de juiste begintoestand is uitgegaan, kan daarin gelegen zijn, dat het deel van de kromme k_2 , dat met behulp van de randvoorwaarde bepaald wordt, niet goed aansluit bij het deel van de kromme dat geheel uit de begintoestand volgt. Wanneer er geen discontinuïteit in de randvoorwaarde is, dan moeten deze twee delen continu in elkaar overgaan. Wordt dan toch een discontinuïteit gevonden, dan volgt hieruit dat de begintoestand verkeerd is aangenomen en dan moet de berekening over een zolange tijd worden voortgezet dat deze discontinuïteit nagenoeg verdwenen is.

Waar een geul in zee uitmondt, kan men de verticale getijbeweging in zee als randvoorwaarde nemen en waar een geul eindigt of in een bovenrivier overgaat, kan men van een randvoorwaarde voor de stroom uitgaan, dus hetzij van $q = 0$ of van $q = \text{bovendebiet}$. Bovendien zijn op een knooppunt in een geulenstelsel van nature steeds evenveel voorwaarden gegeven als er geulen in dat punt samenkomen. Met deze gegevens kan men uitgaande van de toestand op één ogenblik, de ontwikkeling van de getijbeweging van ogenblik tot ogenblik bepalen.

Een bezwaar van de methode is, dat niet direct met de diepte z en de stroomsnelheid v wordt gewerkt en dat steeds van de karakteristieke veranderlijken f^+ en f^- moet worden gebruik gemaakt. Daar staat tegenover, dat de methode door de ingewikkelde randvoorwaarden van een geulenstelsel weinig meer gecompliceerd wordt en dat ook grillig verlopende profielen met weinig meer moeite in rekening gebracht kunnen worden. Bovendien is de voortplanting van een of ander detail in een getijlijn gemakkelijk te vervolgen.

Hoofdstuk II. Electricisch model.

§1. Inleiding.

In Hoofdstuk I werd behandeld hoe met behulp van de wiskunde de voortplanting van het getij kan worden berekend, waarbij dan behalve een fysisch inzicht in deze verschijnselen ook betrouwbare quantitative gegevens verkregen konden worden.

Hiernaast bestaan ook experimentele methoden waarbij het getij wordt nagebootst in een model. Is zulk een model eenmaal vervaardigd, dan worden er sneller resultaten mede gevonden dan met een berekeningsmethode. Het vervaardigen van een betrouwbaar model kan evenwel veel tijd vergen.

Een berekeningsmethode gaat dieper op het mechanisme van de getijbeweging in en geeft dan een beter fysisch inzicht in de aard der verschijnselen. Hierdoor is het ook vaak mogelijk om het rekenwerk te beperken, hetzij door het invoeren van vereenvoudigingen, hetzij dat zelfs tot dergelijke ongunstige resultaten kan worden geconcludeerd, dat verdere berekeningen onnodig zijn.

Tot voor kort kende men alleen het hydraulische model, waarbij de geulen natuurgetrouw in verkleinde vorm worden nagebootst; hierbij kunnen diepte en oppervlakteschaal in een dergelijk model verschillend zijn. De waterbeweging in het model wordt aan de hand van modelregels zo geregeld dat de verhouding tussen verhang- en traagheidskrachten dezelfde is als in werkelijkheid. Alleen de weergave van de wrijving kan moeilijkheden opleveren. Om ook de verhouding tussen verhang- en weerstandskrachten juist na te bootsen moet men zijn toevlucht nemen tot kunstmatige versterking van de turbulentie. Een van de aantrekkelijke eigenschappen van het hydraulische model is, dat hoewel op verkleinde schaal, een visueel beeld van de werkelijkheid verkregen wordt.

Het is echter ook mogelijk gebleken de waterbeweging in een geulenstelsel na te bootsen door de beweging van electriciteit in een electricisch model. In hoeverre deze afbeelding een benadering is van de werkelijke toestand, hangt ook weer af van de uitgebreidheid van de proef; haar grenzen zijn alleen na experimentele ervaring aan te geven. Het voordeel van een electricisch model schuilt vooral in de meetmethode, zowel spanningen als stromen zijn in het electricische model snel te meten.

In het volgende wordt zulk een electricisch model in hoofdtrek-

ken

ken nader behandeld. (zie lit. 4, 6, 10 en 11).

Eerst wordt de elektrische analogie van de waterbeweging in het kort uiteengezet.

§2. Analogie tussen waterbeweging en electriciteit.

De waterbeweging in een geul wordt nader bepaald door de vergelijkingen (5) en (6) van §2:

$$(5) \quad \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g b z} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{h |q|}{c^2 b^2 z^3} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} + f(h) = 0$$

Hier is in (6) de term $f(h)$ toegevoegd. Ze geeft aan een eventuele zijdelingse afvoer per eenheid van lengte, zoals bijv. de afvoer over een hoge kade of andere zijdelingse overstort; deze afvoer kan als een functie van de waterstand in de geul worden opgevat.

Het is nu mogelijk om de periodieke veranderingen van de waterstanden met de daarbij behorende stromen analoog te stellen resp. aan elektrische wisselspanningen en wisselstromen. De vergelijkingen, die het corresponderende verschijnsel in de electriciteitsleer bepalen zullen dan analoog moeten zijn aan die, welke voor de waterbeweging gelden.

Nu vertonen de vergelijkingen (5) en (6) een grote overeenkomst met de vergelijkingen voor ^{een wisselstroom door} een telegraafkabel of een soortgelijke transmissielijn in de electrotechniek:

$$(30) \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0$$

$$(31) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0$$

Hierin is i de elektrische stroomsterkte en v de elektrische potentiaal in een punt van de kabel; L en C zijn de coëfficiënten van de zelfinductie en van de capaciteit; R is de serieweerstand en G is de afleiding, alles gerekend per eenheid van lengte. Dan is $\frac{1}{G}$ de grootte van de parallelweerstand, waardoor stromen uit de kabel weg kunnen lekken. Hierbij wordt eerst speciaal verondersteld, dat de coëfficiënten onafhankelijk zijn van i en v .

De overeenkomst tussen de vergelijkingen (5) en (6) en de vergelijkingen (30) en (31) maakt het in beginsel mogelijk om een electrisch model van een geul en zelfs van een geulstelsel te maken,

waarin

waarin de elektrische stromen en spanningen een maat zijn voor de waterstromen en waterhoogten, die in het geulenstelsel voorkomen. Dan worden de volgende analogieën aangenomen:

waterbeweging.electriciteit.

Q = waterstroom
 h = waterstand

\longleftrightarrow i = elektrische stroom
 \longleftrightarrow v = elektrische spanning

$\rho \cdot g \frac{\partial h}{\partial x}$ = verhangkracht per eenheid van volume \longleftrightarrow $-\frac{\partial v}{\partial x}$ = spanningsgradient

$\rho \cdot g \cdot \frac{g}{C^2 \cdot b^2 \cdot z^3}$ = kracht per eenheid van volume tengevolge van de weerstand. \longleftrightarrow Ri = spanningsgradient tengevolge van de kabelweerstand.

$\frac{\rho}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial t}$ = kracht per eenheid van volume tengevolge van de versnelling eq. vertraging. \longleftrightarrow $L \frac{\partial i}{\partial t}$ = spanningsgradient tengevolge van de zelfinductie

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ = stroomverschil per eenheid van lengte \longleftrightarrow $-\frac{\partial i}{\partial x}$ = stroomverschil per eenheid van lengte

$\partial \frac{\partial h}{\partial t}$ = Accumulatie van water per eenheid van lengte en tijd door komberging. \longleftrightarrow $C \frac{\partial v}{\partial t}$ = stroomverandering tengevolge van accumulatie van electriciteit per eenheid van lengte en tijd door de capaciteit van de kabel.

$f(h)$ = stroom zijdelings wegkwellend per eenheid van lengte. \longleftrightarrow Gv = lekstroom per eenheid van lengte.

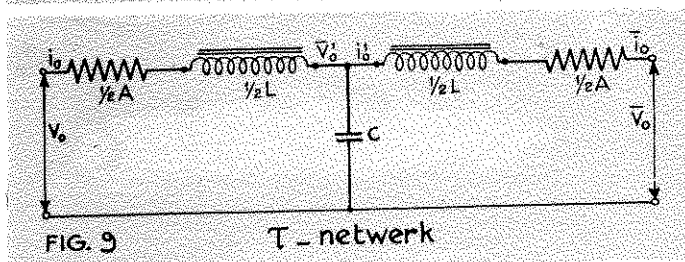
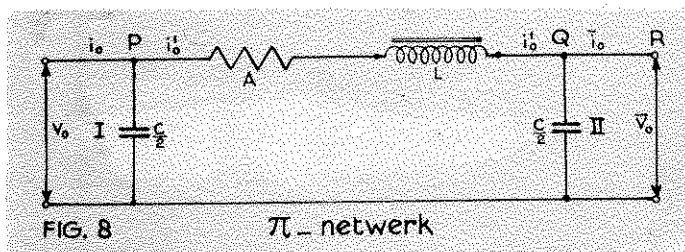
De elektrische verschijnselen in de elektrische kabel zullen analoog zijn met de getijverschijnselen in de geul, wanneer de termen in (30) evenredig zijn met de overeenkomstige termen in (5) en evenzo voor (31) en (6). Nu kan men willekeurig de schalen kiezen, waarop waterstanden door elektrische spanningen en waterstromen door elektrische stromen worden voorgesteld evenzo voor x en t . Zijn deze schalen gekozen, dan ligt de verhouding van de termen $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ vast en R moet nu zodanig gekozen worden, dat dezelfde verhouding tussen de termen $\frac{g}{C^2 \cdot b^2 \cdot z^3}$ en Ri bestaat. Op soortgelijke wijze kan ook bepaald worden hoe L , C en G gekozen moeten worden.

Voor de weergave van de getijbeweging in een geul door middel van een elektrische model zou het het meest voor de hand liggen om een of andere telegraafkabel te nemen met soortgelijke eigenschappen als de geul, waarvan men een model wil maken. In de electrotechniek

is men echter gewoon om bij onderzoeken over telegraafkabels gebruik te maken van modellen bestaande uit aaneenschakelingen van zelfinducties, capaciteiten en weerstanden. Een dergelijk model heeft het voordeel dat de eigenschappen ervan veel gemakkelijker in te stellen zijn dan bij een werkelijke kabel.

Teneinde de telegraafkabels door een model te vervangen wordt deze in secties verdeeld gedacht; zulk een sectie heeft dan een continu verdeelde serieweerstand, parallelweerstand, zelfinductie en capaciteit. In het model wordt elke sectie vervangen door een sectie met dezelfde serieweerstand, parallelweerstand, zelfinductie en capaciteit, doch dan geconcentreerd in enkele weerstandselementen smoorspoelen en condensatoren. Hierbij wordt dus afgezien van de continue verdeling van de weerstanden enz. in de kabelsectie. Hoe groter het aantal secties genomen wordt des te meer zal de continue verdeling in de kabel benaderd worden.

De voornoemde vervanging van een kabelsectie door een netwerk kan nog op twee wijzen geschieden, nl. met behulp van een π -netwerk of een τ -netwerk. In fig. 8 en 9 worden beide netwerken voorgesteld.



§3. Afbeelding van het M_2 getij op een electrisch model.

Een belangrijk verschil tussen de vergelijkingen (5) en (6) enerzijds en de vergelijkingen (30) en (31) anderzijds is, dat de laatste lineair zijn, doch (5) en (6) niet. Bij een electrisch model van een geul zal men óf met een lineaire benadering van (5) en (6) moeten werken óf men zal in het electrisch model niet-lineaire elementen moeten invoeren overeenkomstig de niet-lineaire termen in (5) en (6). Zoals in hoofdstuk I, § 2 en § 3 is behandeld, betekent een lineaire benadering van (5) en (6), dat alleen de voort-

planting van het M_2 getij wordt beschouwd.

Inplaats van de bewegingsvergelijking (5) wordt dan de vergelijking (30) beschouwd. Het elektrische model zal daarbij zo ingericht moeten worden, dat de vergelijking (30) overgaat in een vergelijking met lineaire weerstanden als in (11_b) is aangegeven. Hierbij wordt opgemerkt, dat het niet mogelijk is om in een dergelijk model gelijkstroom (bovenafvoer) en wisselstromen (getijstromen) tegelijk in te voeren. Men is daarom gedwongen om alleen de voortplanting van het M_2 getij in een model weer te geven, waarbij de invloed van de oppervlaktewaterafvoer op dit getij indirect op theoretische wijze ingevoerd wordt. Zoals in hoofdstuk I § 3 is aangetoond, geschiedt dit door middel van de coëfficiënt m_1 . Hierbij moet ter bepaling van m_1 enig rekenwerk verricht worden door eerst de gemiddelde stroom q_2 in iedere sectie van de rivier te schatten. Daarna wordt het equivalente M_2 getij aangebracht en nagegaan of de optredende stromen i in overeenstemming zijn met die, welke uit de schatting voor q_2 volgen. Is dat niet het geval, dan moeten de weerstanden worden gewijzigd tot er overeenstemming is bereikt. De gang van zaken is dus zo, dat de elektrische proef in dit geval eigenlijk een rekenmachine is, die de vergelijkingen van de lineaire methode oplost. Zijn daarna de waarden van het M_2 getij gevonden, dan is het eenvoudigst om het verloop van de middenstand te berekenen met behulp van de formule (11_a).

Tenslotte nog enkele bijzonderheden: In het elektrisch model werd uit praktische overwegingen een frequentie toegepast van 1000 trillingen per seconde (1000 Hz.), terwijl bij de getijbeweging het M_2 getij een periode van 44.700 sec. heeft. De factor van de ingevoerde tijdschaal is dus $2.25 \cdot 10^{-8}$. De stromen worden weergegeven op de schaal van 0,01 milliampère voor $1 \text{ m}^3 \text{ sec.}^{-1}$ en de waterstanden door de elektrische spanning op de schaal van 10 Volt voor 1 meter. (zie lit. 6,19 en 11).

§ 4. Weergave van de waterbeweging met behoud van de quadratische weerstandswet door middel van metaalgelijkrichters.

Bij toepassing van quadratische elektrische weerstanden, kunnen wisselstromen en gelijkstromen wel tezamen in een model worden ingevoerd. Hierbij wordt het voordeel bereikt, dat de stroom niet vooruit geschat behoeft te worden en er praktisch geen rekenwerk aan de modelproef vooraf behoeft te gaan.

Voor

Voor het realiseren van de quadratische weerstandswet is het idee aan de hand gedaan om gebruik te maken van zgn. Cuprox-gelijkrichtcellen. (zie lit.6 en 11). Zulk een cel laat slecht in één richting stroom door en deze stroom is ongeveer evenredig met het kwadraat van de spanning op de cel: $i = A v^2$. Door twee zulke cellen parallel te schakelen met tegengestelde doorlaatrichting, krijgt men een element dat in twee richtingen stroom doorlaat evenredig met het kwadraat van de spanning, dan is dus voor beide gelijkrichters tezamen genomen $i = A |v| v$. Voor het weergeven van een quadratische weerstand zou men evenwel een element moeten hebben, dat een spanningsverlies geeft evenredig met het kwadraat van de stroom, die er doorheen gaat: $v = A i^2$.

De moeilijkheid kan worden overwonnen door op te merken, dat de stromen in het geval van de hydraulica ook kunnen corresponderen met de elektrische spanningen. Dan moeten de elektrische stromen corresponderen met de waterstanden. De afbeelding wordt dus:

$$q \rightarrow v;$$

$$h \rightarrow i.$$

In de formules moeten dan de termen in (31) evenredig zijn met de termen in (5) en de termen in (30) met de termen in (6). Uit de vorm van de genoemde formules blijkt dit direct mogelijk. Dan moet L evenredig met B gemaakt worden en $f(h)$ met Ri . Veelal is er in werkelijkheid geen zijdelingse lekstroom, dus $f(h) = 0$. Dan zal in het elektrische model $R = 0$ moeten zijn. Men kan de weerstand R in het model wel klein maken, maar nimmer geheel laten verdwijnen. Er zijn meer van zulke niet geheel te vermijden kleine afwijkingen tussen model en werkelijkheid.

Verder zal C evenredig moeten zijn met $\frac{1}{g\omega z}$ en Gv met $\frac{|g|}{C^2} \frac{g}{b^2} \frac{g}{z^3}$

Bij deze proef zijn de veranderingen van z niet in rekening gebracht, zodat z dus constant gesteld is. Voor de parallelweerstand van een sectie moeten we dan een element hebben, dat een stroom i doorlaat evenredig met $|v| v$, nl. de bovengenoemde metaalgelijkrichters.

Voor een enkele geul is er geen bezwaar tegen om gebruik te maken van de hier besproken analogie, doch in geval van geulenstelsels kunnen er bezwaren zijn. Elk geulenstelsel kan wel worden nagebootst in een elektrisch model waarbij waterstromen worden afgebeeld als elektrische stromen, doch dit slaagt niet in een geulenstelsel, wanneer van de analogie tussen waterstromen en elektrische spanningen gebruik gemaakt wordt, tenzij men bepaalde kunstgrepen toepast. Het zou te ver voeren om hierop dieper in te gaan. (zie lit. 11).

Tenslotte zal nog worden aangetoond, dat met behulp van T- of π -netwerken waarin een quadratische weerstandselement voorkomt, formules kunnen worden opgesteld, betreffende het verband tussen de spanningen en stromen aan begin en eind van een sectie, die analoog zijn aan de formules (21) en (22). (zie lit. 11). In fig. (8) is een dergelijke π sectie voorgesteld. Gevraagd wordt het verband tussen v_0 en \bar{v}_0 enerzijds en i_0 en \bar{i}_0 anderzijds te bepalen.

Voor de tak PQ geldt met inachtneming van de stroom naar de condensator I

$$(32) \quad i_0' = i_0 - \frac{C}{2} \frac{\partial v_0}{\partial t}$$

Om de stroom te bepalen in een punt van de tak QR is het nodig om eerst de spanning over de condensator II te berekenen. Bij het punt P is de spanning v_0 , doch in Q een andere door het spanningsverlies over de elementen A en L:

$$(33) \quad \bar{v}_0 = v_0 + i_0^2 A - L \frac{\partial i_0}{\partial t} \quad (b) \quad (c)$$

Immers de stroom, die door de quadratische weerstand gaat, is gelijk aan i_0' en dus is (b) het spanningsverlies als gevolg van deze weerstand. Evenzo is (c) het spanningsverlies tengevolge van de zelfinductie.

Tenslotte geldt voor de stroom \bar{i}_0 op de tak QR, analoog aan (32),

$$(34) \quad \bar{i}_0 = i_0' - \frac{C}{2} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t}$$

Uiteindelijk wordt dus gevonden door (33) en (34) nader uit te werken in verband met (32):

$$(35) \quad \begin{aligned} \bar{v}_0 &= v_0 + A i_0^2 - L \frac{\partial i_0}{\partial t} \pm AC i_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} \mp \frac{1}{4} AC^2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{8} LC \frac{\partial^2 i_0}{\partial t^2} \\ \bar{i}_0 &= i_0 - C \frac{\partial v_0}{\partial t} \pm AC i_0 \frac{\partial i_0}{\partial t} + \frac{1}{8} LC \frac{\partial^2 i_0}{\partial t^2} \end{aligned}$$

De voornaemste termen in (35) kunnen door een geschikte keuze van L, C en A evenredig worden gemaakt met de termen in (21) en (22). Dan bestaat de volgende analogie, als \bar{h} en \bar{q} resp. weer afgebeeld worden op \bar{v}_0 en \bar{i}_0 :

$wxq^2 \rightarrow A i_0^2$; $fx \frac{\partial q}{\partial t} \rightarrow L \frac{\partial i_0}{\partial t}$; $Ex \frac{\partial h}{\partial t} \rightarrow C \frac{\partial v_0}{\partial t}$, terwijl voor de correctietermen bijv. geldt:

$$B w x^2 q \frac{\partial h}{\partial t} \rightarrow i_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} \quad A \quad C \quad \text{enz.}$$

Dan blijkt, dat alleen de onderstreepte correctieterm in (35) niet geheel analoog is met de correspondentie term in (21).

In het voorgaande is de term van Bernoulli verwaarloosd; ze blijkt in het algemeen voor de getijbeweging van geringe betekenis, tenzij overlaten enz. voorkomen. Bovendien is geen rekening gehouden met de veranderingen, die de diepte gedurende de getijbeweging ondergaat. Op deze kwestie wordt aan het slot nog nader teruggekomen.

§ 5. Resultaten van een proef met het electrisch model.

Er werden eerst een reeks proeven uitgevoerd met behulp van een lineaire weerstand, parallel met de berekeningsmethode van Masure. Hierbij werd dan speciaal het M₂ getij beschouwd, zoals in het voorgaande nader is behandeld (I, § 3 en II, § 1). Schema's van dergelijke lineaire netwerken betreffende de Lek zijn o.a. in de publicaties (6) en (11) gepubliceerd.

Daarna bleek het mogelijk om de quadratische weerstandswet, zoals deze voor de getijbeweging geldt, in het electrisch model te realiseren. Het was aanvankelijk noodzakelijk om met een dual schema te werken, zodanig dat de waterstroom weergegeven wordt door de electrische wisselspanning en het verticale getij door de electrische wisselstroom. (zie § 4). Betreffende deze proef, waarbij de waterbeweging op de rivier de Lek als voorbeeld werd gekozen was het niet noodzakelijk om alleen van het M₂ getij uit te gaan; iedere voorkomende getijbeweging kan eveneens worden ingevoerd.

Iedere riviersectie is in het model nagebootst met een π sectie waarin metaalgelijkrichters voorkomen (zie fig. 10).

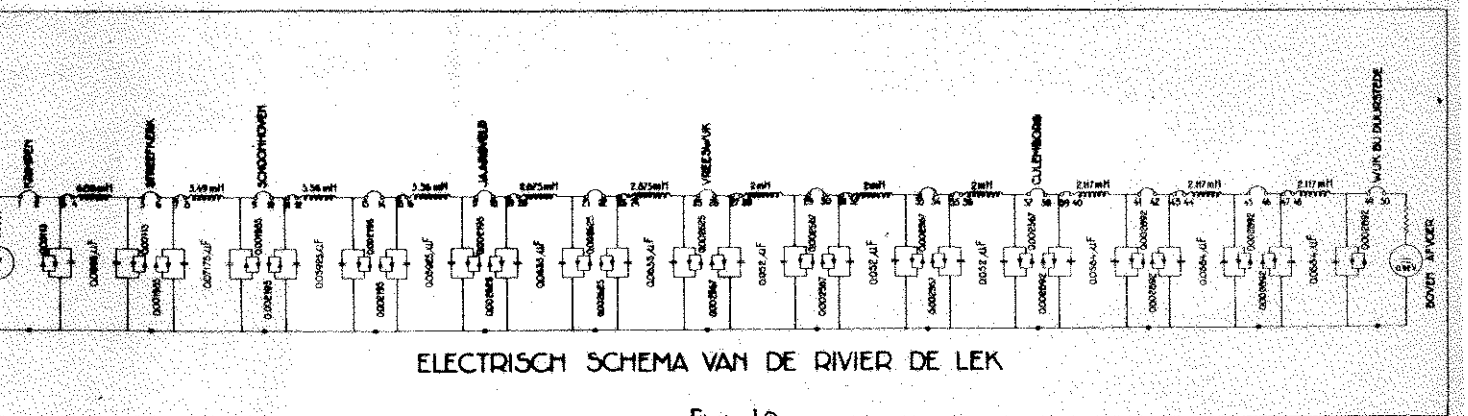


Fig. 10

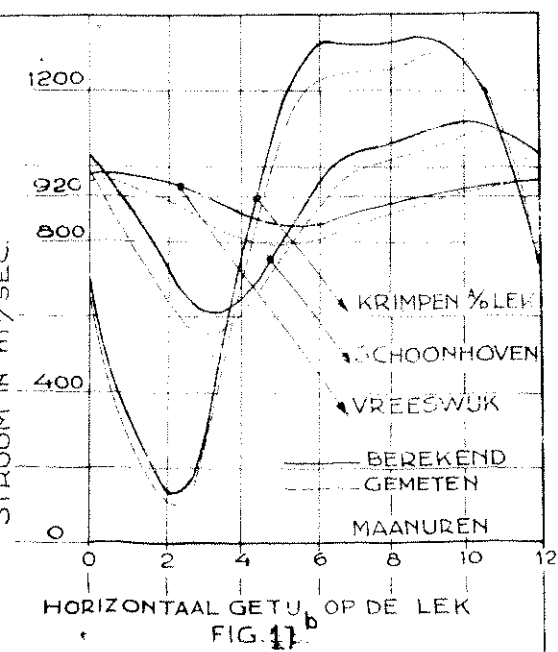
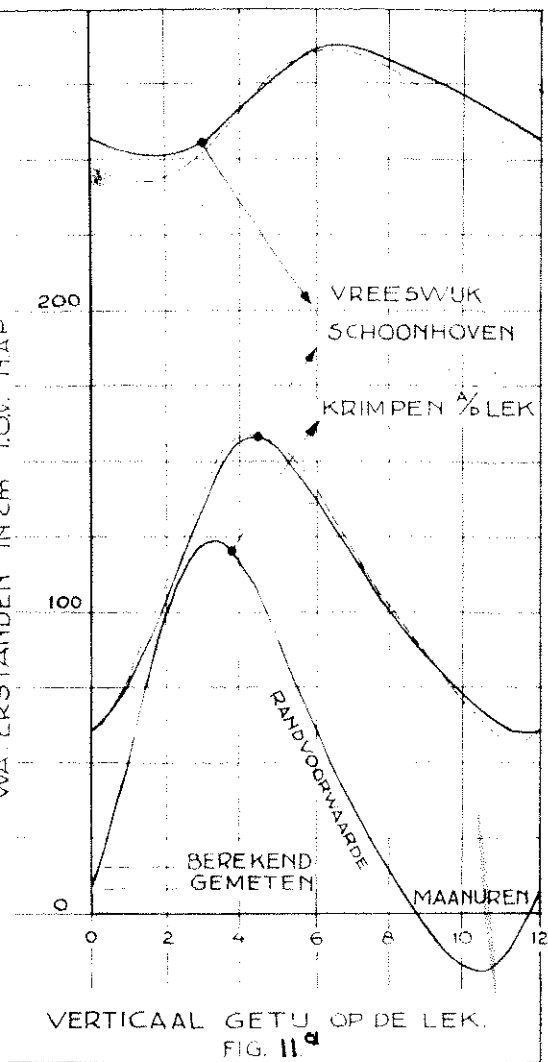
Bij deze proef werd de bovenwaterafvoer gesteld op $920 \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$, terwijl het verticale getij te Krimpen a/d Lek (zie fig. 11 a) bepaald werd met de formule:

$$h_{Kr} = 0,47 \text{ m} + 0,68 \text{ m} \cdot \cos wt + 0,13 \text{ m} \cdot \cos (2wt - 50^\circ)$$

Voor de schaal werd gekozen: 10 milliampère voor 1 meter verhang; 1 millivolt voor $1 \text{ m}^3 / \text{sec}^{-1}$ en $2,24 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$ voor 1 seconde (zie § 3)

De bovenafvoer van $920 \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$ moet dus worden nagebootst met een gelijkspanning van 0,92 V en de randvoorwaarde te Krimpen met een stroomtoevoer:

$$i_{Kr} = 4,7 \text{ mA} + 6,8 \text{ mA} \cos wt + 1,3 \text{ mA} \cos(2wt - 50^\circ) \quad (\omega = 2000\pi).$$



Deze randvoorwaarde te Krimpen bestaat dus uit een gelijkstroom waarop twee wisselstromen gesuperponeerd worden, nl. een harmonische M_2 met een frequentie van 1000 Hz. ($T = \frac{1}{1000 \pi}$ sec., $\omega T = 2\pi$) en een eerste bovenharmonische M_4 van 2000 Hz.

In fig. 10 is het gehele schema voor de Lek afgebeeld, terwijl op foto 12 een overzicht is gegeven van de gehele apparatuur. Het is eigenlijk noodzakelijk om in het gehele netwerk de gelijkspanning van 0,92 V te handhaven, doch dit is door de niet geheel te vermijden weerstand van de in serie staande spoelen niet volledig te verwezenlijken. Er kwam daardoor een kleine fout in de uitkomsten van dezelfde aard als wanneer er lek en kwelverliezen op de rivier waren geweest.

Voor het verrichten van elektrische metingen aan het model kunnen de verfijnde elektrische meetmethoden worden toegepast. (voltmeter met hoge weerstand voor gelijkspanning en compensator voor wisselstromen).

De spanningen en stromen in het model kunnen ook zichtbaar gemaakt worden op het beeldvlak van een kathodestraalbuis. Op foto 13 zijn de stroomkrommen aangegeven zoals ze ter plaatse van de peilschaalstations langs de rivier de Lek op de kathodestraalbuis zichtbaar worden. Op foto 14 zijn de waterstanden op de Lek zichtbaar gemaakt, die in het model overeenkomen met de stromen.

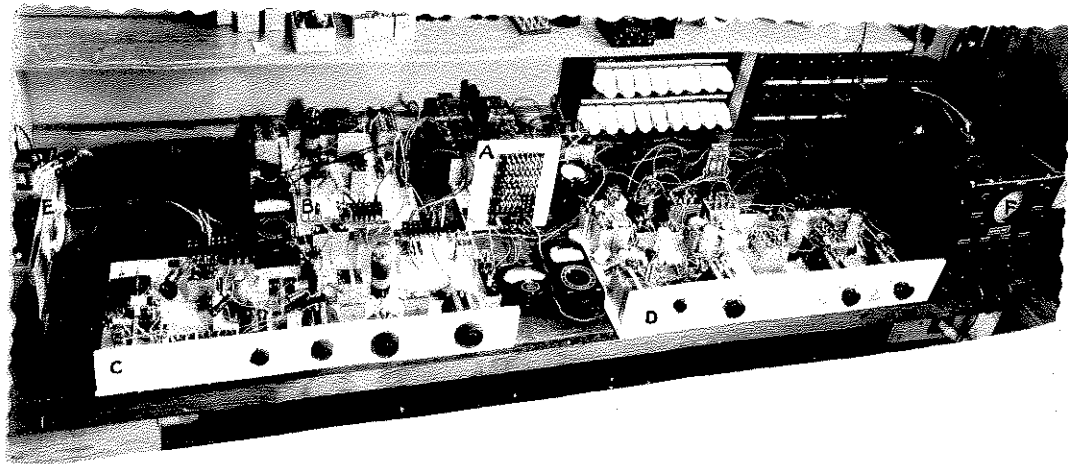


fig. 12

Opstelling apparatuur voor de elektrische imitatie van de waterbeweging op de rivier de Lek.

A - rivier de Lek C - 2000 Hz. (versterker) E - accumulator (filter)
 B - 1000 Hz. (versterker) D - capacitor (meetapparaat) F - kathodestraal oscillograaf

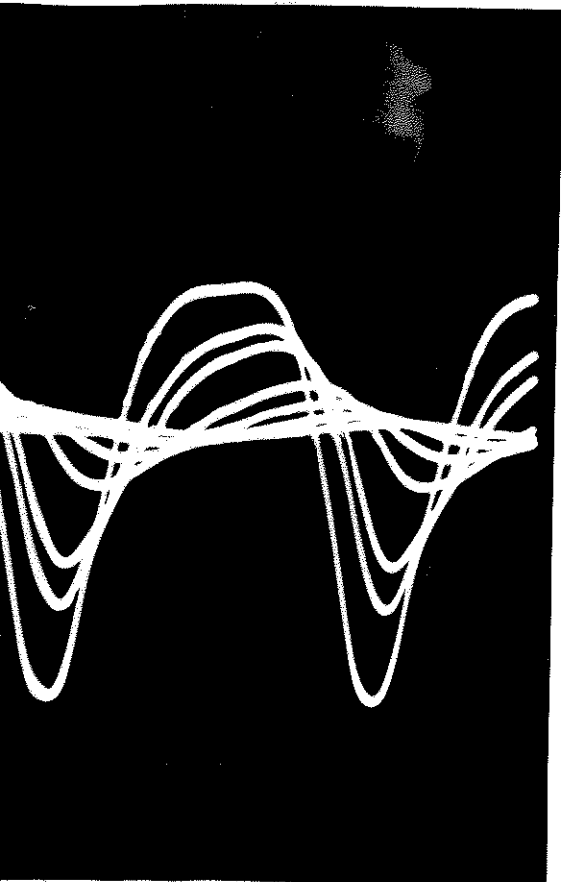


fig. 13

Horizontaal getij op de rivier de Lek, zichtbaar gemaakt met behulp van een kathodestraal oscillograaf.

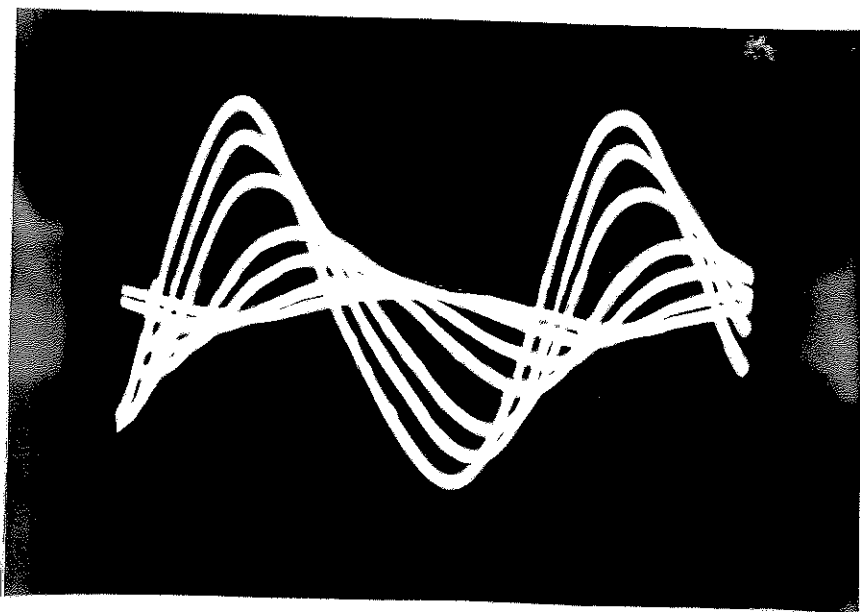


fig. 14

Verticaal getij, op de rivier de Lek, zichtbaar gemaakt met behulp van een kathodestraal oscillograaf.

Voor ieder meetpunt van het model heeft de gelijkstroom een andere waarde, daar tussen de meetpunten stroom wegloopt door de Cuproxcellen en wel des te meer naarmate de weerstand dier cellen kleiner is. Dit komt overeen met de middenstandsvervallen op de rivier ten gevolge van de weerstand. Hoe groter de weerstand in de rivier is, hoe kleiner daarom de weerstand van de Cuproxeel gekozen moet worden.

Deze gelijkstromen werden niet zichtbaar gemaakt, zodat de stroomkrommen in het model op het scherm van de kathodestraal alle om dezelfde nullijn slingeren. Eigenlijk zouden deze krommen in verticale richting verschoven moeten worden tot hun respectievelijke middenstanden.

In fig. 11a en 11b zijn de berekende en gemeten horizontale en verticale getijkrommen te Krimpen a/d Lek, Schoonhoven en Vreeswijk grafisch voorgesteld. Deze figuren geven een goed beeld van de nauwkeurigheid van de proef. De verschillen in de berekende en gemeten waarden zijn hoofdzakelijk te wijten aan de hierboven genoemde weerstanden der spelen.

Bij de elektrische imitatie van de getijbeweging, zoals deze in het voorgaande is behandeld, zijn nog verschillende benaderingen aangenomen, als constante diepte, stroombreedte en kombergingsoppervlakte. Momenteel worden onderzoeken uitgevoerd om ook deze grootheden variabel in te voeren. In de toekomst zullen hierover nadere publicaties verschijnen.

§ 6. Weergave van de quadratische weerstand, veranderlijke diepte en komberging in het elektrisch model met behulp van elektronenbuizen.

Een andere oplossing voor het weergeven van de quadratische weerstand is door middel van een elektronenbuis. In dit geval worden weer de stromen in de geul door de stromen in het model, de waterstanden in de geul door de spanningen en de vervallen door spanningsverschillen in het model weergegeven.

Het blijkt dan mogelijk om een nog nauwkeuriger weergave van de getijformules te verkrijgen dan volgens de voorgaande methode mogelijk is. In de formules (5) en (6) verandert nl. de diepte z gedurende het getij, zowel in de coëfficiënt van de versnellings-term als in die van de weerstand. Verder zal ook vaak de kombergingsbreedte B van laag-tot hoogwater in aanzienlijke mate veranderen. Vanuit elektrisch oogpunt betekent dit dat A , C en L (zie (30) en (31)) afhankelijk moeten worden gemaakt van de spanning v . Dit kan nu geschieden met behulp van de genoemde elektronenbuizen.

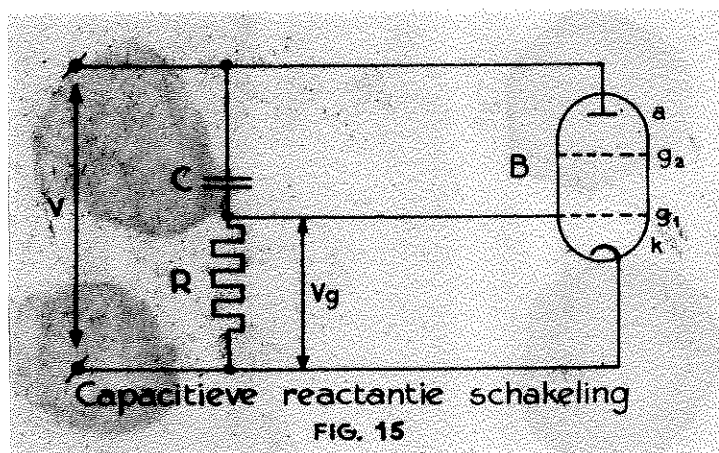
Een elektronenbuis is een luchtledig vat waarin zich twee of meer electroden bevinden, namelijk een anode, een kathode en eventueel een aantal roosters. Aan elk van de electroden kan stroom en spanning worden toegevoerd. De roosters kunnen verschillende functies hebben, doch voor ons doel is vooral van belang een soort rooster dat stuurrooster genoemd wordt. De buis is zodanig geconstrueerd, dat de stroom die bij de anode de buis binnentreedt en bij de kathode naar buiten treedt, veel sterker beïnvloed wordt door de spanning tussen het stuurrooster en de kathode, dan door de spanning tussen de anode en de kathode. De stroom door de buis wordt als het ware gestuurd door de spanning op het stuurrooster.

Er wordt den gebruik gemaakt van het feit, dat bij een bepaalde instelling de stroom door de buis quadratisch met de anode-

spanning verandert, terwijl de coëfficiënt in dit quadratische verband nog met de stuurspanning verandert. Door op een geschikte wijze de spanning, die overeenkomt met de diepte in de rivier, op het stuurrooster te laten inwerken, wordt bereikt dat de moduspanning niet alleen evenredig wordt met het kwadraat van de stroom, maar ook nog toeneemt als de spanning (diepte) afneemt en omgekeerd.

Een verdere verbetering is aangebracht door de capaciteit, die met het kombergingsoppervlak overeenkomt, afhankelijk te maken van de spanning die de waterstand in de goul weergeeft. Daardoor is het mogelijk om een goul weer te geven waarin de bergende oppervlakte met het stijgen van de waterspiegel toeneemt. Dit is van groot praktisch belang, daar verschillende goulen in het stelsel van onze zeearmen bij hoogwater een enige malen groter bergend oppervlak hebben dan bij laagwater.

De veranderlijke capaciteit wordt gerealiseerd met een schakeling die in fig. 15 is weergegeven.



De spanning v , die overeenkomt met de diepte in de goul, staat over een condensator C en een weerstand R . De spanning V_g over de weerstand R , die eveneens in fase voorrijft, staat op het stuurrooster g_1 van de electronenbuis B . Deze stuurroosterspanning doet door de buis B een stroom lopen die ook weer in fase voorrijft bij de spanning v . Deze stroom gedraagt zich dus op dezelfde wijze

als een stroom naar een condensator.

Door de spanning v nog op een geschikte wijze op het tweede stuurrooster g_2 te laten inwerken wordt bovendien bereikt dat de schijnbare capaciteit nog toeneemt in afhankelijkheid van v . Dit komt dus neer op een toename van de bergende breedte in de geul wanneer h toeneemt.

Tenslotte kan nog de variabele diepte die in de versnellings-term van de formule (5) voorkomt, in het electrisch model worden afgebeeld, door de coëfficiënt van zelfinductie L afhankelijk te maken van de spanning v . Hierbij wordt dan gebruik gemaakt van het feit dat de zelfinductie van een smoorspoel met ijzeren kern afhankelijk is van de permeabiliteit van het ijzer. Deze verandert met de veldsterkte in het ijzer en die veldsterkte kan worden ingesteld met een hulpwikkeling waardoor een gelijkstroom wordt gezonden. De grootte van deze stroom bepaalt de permeabiliteit van de ijzerkern en daarmee de zelfinductie van de spoel. De hulpstroom kan door middel van een buisschakeling door een hulpspanning worden geregeld. Door deze laatste af te leiden van de spanning in de rivierschakeling kan dus de zelfinductie hiervan afhankelijk worden gemaakt.

Het in rekening brengen van een veranderlijke bergende breedte is over het algemeen van groter praktisch belang dan het in rekening brengen van een veranderlijk doorstromingsprofiel. Dit laatste zal vooral van belang worden bij een belangrijke getijamplitude. Dan moet ook overwogen worden of andere termen, die tot nu toe in de bewegingsvergelijking werden verwaarloosd, van praktisch belang worden. Betreffende het in deze paragraaf behandelde onderzoek worden momenteel nadere proeven verricht.

Literatuurlijst

1. "Verslag van de Staatscommissie Zuiderzee" 1918 - 1926
Den Haag. Algemene Landsdrukkerij 336 pag. 61 fig.
2. J.Th.Thijssse L'influence de la fermeture du Zuyderzee sur le régime des marées le long des côtes néerlandaises. Bulletin de l'Association permanente des Congrès de navigations. 1933 Nr. 15
3. J.J.Dronkers Een getijberekening voor benedenrivieren
"De Ingenieur" 1935 6 pag. 3 fig.
4. Joh.van Veen Getijstroomberekeningen met behulp van wetten analoog aan die van Ohm en Kirchhoff.
"De Ingenieur" Nr. 19 1937 9 pag. 16 fig.
5. J.P.Mazure De berekening van getijden en stormvloeden op benedenrivieren. 1937 222 pag. 12 fig.
Drukkerij Gerretsen, Heidornstraat 2 Den Haag.
6. Joh.van Veen Electricische nabootsing van getijden.
"De Ingenieur" 1946 Nr. 3 4 pag. 2 fig.
7. P.J.Wemelsfelder "Wetmatigheden in het optreden van stormvloeden".
"De Ingenieur" 1939 Nr. 9
8. H.J.Stroband "Een bijdrage tot de kennis van de getijberekening op benedenrivieren". "De Ingenieur" 1947 Nr. 36
6 pag. 8 fig.
9. J.J.Dronkers "Methoden van getijberekening"
"De Ingenieur" 1947 Nr.49 16 pag. 6 fig.
10. Joh.van Veen Analogie entre Marées et courants alternatifs
"La Houille Blanche" Numéro 5. Septembre-Octobre 1947
23 Grande Rue; Grenoble 15 pag. 22 fig.
11. H.J. Stroband "De voortplanting van het getij, bepaald met behulp van de electrotechniek, met inachtneming van de kwadratische weerstand".
Poly technisch Tijdschrift 1948 Nr. 45-46 en Nr.47-48
(Uitgave B) 13 pag. 23 fig.
12. H. Holster Le calcul du mouvement non-permanent dans les rivières par la méthode dite des "Lignes d'influence"
Revue Générale de l'Hydraulique. 1947 30 pag. 11 fig.
13. J.C.Schönfeld Propagation of tides and similar waves.
Proefschrift 1949 Delft.