

205

HET  
ROLLEND ZANDTRANSPORT  
IN RIVIEREN

DOOR:  
R.H.J. MORRA

RAPPORT N<sup>o</sup>1-1951



DDOT-BEN-1951-01

553.07

553.07

MORR.

Opdracht 1950 no. 2.

Lasthebber : R.H.J. Morra.

Plaats :

Onderwerp : Rollend zandtransport.

Omschrijving : In aansluiting op Uw nota over zwevend zandtransport in stromend water wordt nu verzocht om een eveneens op theoretische gronden steunende verhandeling te geven van het rollend zandtransport. Zie de moderne Amerikaanse literatuur. Empirische formules kunnen buiten beschouwing blijven. De formules s.v.p. toetsen aan metingen.

Rapportinhoud :

Vorige rapporten : De zandgehalte verticaal bij stationnaire stroming onder evenwichtsvoorwaarden 1948.

Geschatte duur der meting :

Medewerkers :

Instrumenten :

Vaartuigen :

Begindatum : 1 September 1950.

Einddatum :

Afgedaan : 1 April 1951.

Te zenden aan :

's-Gravenhage, 1 September 1950.

w.g. J. van Veen.

Het rollend zandtransport in rivieren.

§1. Inleiding.

Er bestaat op het gebied van zandtransport een welhaast verbijsterend aantal formules (lit. 1), waarvan een zeer belangrijk deel geheel empirisch is en een kleiner deel, wat semi-empirisch is. Uiteraard zijn deze formules alleen geldig voor de meestal zeer beperkte omstandigheden, waarvoor ze opgesteld zijn. Sommige dezer formules zijn zelfs dimensioneel inconsequent. Gaat men deze formules buiten het gebied en de omstandigheden, waarvoor ze opgesteld zijn, toepassen, dan vindt men zeer grote afwijkingen. Het toepassingsgebied dezer formules blijkt veelal niet. Uit lit. 2 blijkt, dat een formule van Straub in de Nederrijn bij Arnhem slechts bruikbare resultaten geeft, wanneer men een bepaalde constante door 5 deelt, daartegenover moet een constante van een formule van Meyer - Peter met 10 vermenigvuldigd worden. Ook is meestal niet uit te maken of de onderhavige formule betrekking heeft op rollend en/of zwevend transport.

De vorderingen op het gebied van het turbulentieonderzoek hebben het mogelijk gemaakt om de oplossing van het zandtransportvraagstuk dichter te benaderen. Voor het zwevend transport wordt in dit verband verwezen naar lit. 7. A.A. Kalinske heeft in een artikel: "Movement of sediment as bed load in rivers" (lit. 3) een analyse ontwikkeld, waarbij hij uitgaat van fundamentele hydrodynamische wetten en tot een formule komt, die bij toetsing aan metingen zowel in rivieren als in proefgoten een zeer bevredigend resultaat geeft. Zijn analyse die gebaseerd is op een idee van E.W. Lane geeft een helder fysisch beeld van het proces van rollend transport. Allereerst wijdt hij zijn aandacht aan het begin der beweging, daarna aan het voortzetten van de beweging. Deze nota is een vrije weergave van het artikel van Kalinske met een enkele aanvulling ter bevordering van de duidelijkheid.

§2. Grondgedachten.

Men kan drie soorten transport onderscheiden: zwevend,

-rollend-

rollend en springend transport. Het springend transport is te beschouwen als een overgang tussen rollend en zwevend.

Onder rollend transport wordt hier verstaan het zand wat zich uitsluitend rollend over de bodem beweegt, dus niet tot zweving komt. Hoewel het onwaarschijnlijk is dat een bepaald zandkorreltje zich òf uitsluitend rollend, òf uitsluitend zwevend beweegt, doch veeleer beurtelings rolt en zweeft, is bovenstaande definitie toch wel aanvaardbaar, omdat een korreltje, dat zich langer of korter zwevend verplaatst in het zwevende transport is begrepen.

Kalinske bouwt zijn analyse op de volgende grondgedachten:  
1<sup>e</sup>. Er is een minimum kracht, veroorzaakt door stromend water, die een zandkorrel het begin van beweging zal geven. Deze kracht zal in geringe mate variëren, zelfs voor zand met uniforme korrelgrootte, omdat vooral bij hoekige korrels deze niet alle op dezelfde wijze op de bodem rusten. De grootte van deze kracht moet bekend zijn en in verband gebracht worden met de sleepkracht op de bodem, veroorzaakt door de stromende vloeistof.  
2<sup>e</sup>. De kracht die op een korrel werkt is niet constant maar fluctueert om een bepaald gemiddelde. Deze fluctuatie kan twee oorzaken hebben:

- a. Wanneer het algehele stromingsbeeld van een vloeistof laminair is, dan kunnen om een korreltje kritische stromingsvoorwaarden bereikt worden, waardoor achter dit korreltje kleine wervelingen ontstaan, die op hun beurt oorzaak zijn van fluctuaties van de op de korrel werkende kracht;
- b. wanneer het algehele stromingsbeeld van een vloeistof turbulent is, wat als regel het geval zal zijn, zal als gevolg hiervan, vooral nabij de bodem, een pulsatie van de stroomsnelheid optreden met als gevolg een sterke fluctuatie van de op de korrel werkende kracht.

De variatie van de vloeistof-snelheid moet bekend zijn of vastgesteld worden, alvorens een verantwoorde analyse kan worden opgesteld.

3<sup>e</sup>. Een van de fundamentele problemen is de bepaling van de snelheid waarmee de korrels rollen en het verband hiervan met de gemiddelde hydraulische voorwaarden in de rivier. Kent men deze verplaatsingsnelheid en het aantal korrels, dat in

beweging is, dan volgt met inachtnaam van de korrelgrootte de grootte van het rollend transport.

Er zal blijken, dat er geenszins een vaste verhouding bestaat tussen rollend en zwevend transport. Deze verhouding wordt geheel bepaald door de hydraulische voorwaarden en de korrelgrootte. Hoe grover het bodemmateriaal is des te belangrijker wordt het rollend transport. Omgekeerd zal bij fijn materiaal het zwevend transport gaan overwegen.

### §3. Het begin der beweging.

Het is voor meerdere problemen, als bodemerrosie, zandtransport in rivieren, van belang om de stromingsvoorwaarden te kunnen berekenen waarbij het begin van beweging van een zandkorrel op zal treden. Er zijn meerdere uitdrukkingen bekend voor de zogenaamde kritische snelheid of kritische sleepkracht, die echter veelal het verband aangeven met de gemiddelde stromingsvoorwaarden, doch hiermee komt men niet tot de werkelijke kritische sleepkracht of snelheid, die het begin der beweging veroorzaakt. Want, zoals nog zal blijken, kan de maximum op een korrel werkende kracht makkelijk 3 à 4 x de gemiddelde waarde worden. Het zal duidelijk zijn, dat er echter een minimum kracht is, die het begin der beweging veroorzaakt en het is meer logisch om van deze minimum kracht uit te gaan dan de gemiddelde kracht als uitgangspunt te kiezen.

De nu volgende beschouwing is voor zand van uniforme korrelgrootte, waarbij geen cohesie optreedt.

Stelt men zich nu een nagenoeg bolvormige korrel voor, die rust op andere korrels (figuur 1) dan werken op deze korrel drie krachten nl. de zwaartekracht, de opwaartse druk en de kracht veroorzaakt door de stroming van de vloeistof en waarvan de richting ten naaste bij overeenkomt met de stromingsrichting.

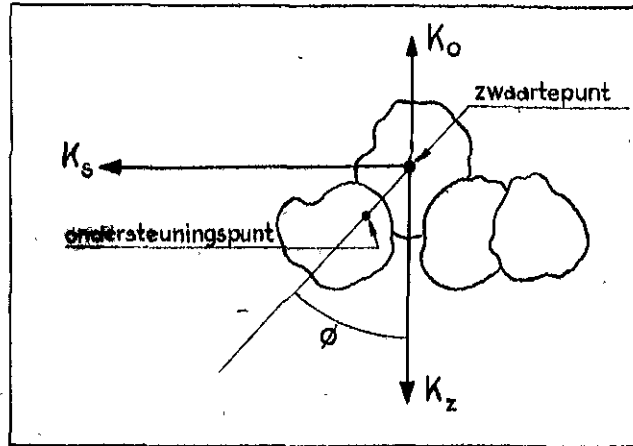
White heeft aangetoond (lit. 31):

1°. dat de lift veroorzaakt door  $K_s$  voor de rollende beweging geheel verwaarloosbaar is,

2°. dat het aangrijpingspunt van  $K_s$  afhangt van het Reynoldse getal van de zandkorrel ( $R_z$ ). Is  $R_z > 3,5$ , dan is  $K_s > (K_z - K_o)$

-en-

en gaat de resultante van de 3 krachten ten naaste bij door het zwaartepunt van de korrel.



Figuur 1.

Het is duidelijk, dat de kritische stroomkracht, dus de kracht die het begin der beweging veroorzaakt, met  $K_z$  een resultante geeft, die precies door het in figuur 1 aangeduide ondersteuningspunt gaat. Er volgt dan, dat

$$K_{sc} = (K_z - K_0) \operatorname{tg} \phi = \frac{\pi}{6} (\rho_z - \rho_w) g d^3 \operatorname{tg} \phi \quad (1).$$

Het verband tussen de stroomkracht op een korrel ( $K_s$ ) en de eenheid van de sleepkracht hangt af van het aantal korrels per oppervlakte-eenheid, dat deze sleepkracht opneemt en dit aantal korrels is op zijn beurt weer afhankelijk van de mate van samenpakking van deze korrels.

Wanneer men het oppervlakte-deel, dat de sleepkracht opneemt,  $p$  noemt, dan is het aantal korrels, dat de sleepkracht opneemt uitgedrukt door

$$\frac{4 p}{\pi d^2}$$

In het algemeen zal  $p$  voor materiaal van uniforme korrelgrootte weinig variëren. Men krijgt dan voor de kritische sleepkracht:

$$\tau_c = \beta \cdot \frac{4 p}{\pi d^2} \cdot K_{sc} = \alpha \beta p (\rho_z - \rho_w) g d \operatorname{tg} \phi \quad (2).$$

De factor  $\alpha$  behoeft niet noodzakelijk  $\frac{4}{6}$  te zijn, zoals voor zuiver bolvormige lichamen zou volgen, doch zal iets variëren met de korrelvorm.

De factor  $\beta$  geeft de verhouding aan tussen de werkelijke en de theoretische  $\tau_c$ , omdat zoals reeds gezegd is, kleine wervelingen achter de korrels fluctuaties van  $K_{so}$  veroorzaken.

White vond voor  $\beta = \frac{1}{2}$  wanneer  $R_z > 3.5$ , dus blijkbaar bereikt de maximum waarde van  $K_s$  het dubbele van de gemiddelde.

Voor  $R_z < 3.5$  vond White  $\alpha p = 0,30$  voor zand van 200 en 900  $\mu$ . Rechtstreekse bepalingen van  $p$  leverden  $\pm 0,35$  op.

Er zijn nog maar zeer weinig waarden bekend van  $\alpha$ ,  $p$  en  $\beta$ , derhalve worden hier de waarden van White aangehouden, zijnde de best bekende benadering.

Gaat men uit van zand met een specifieke dichtheid van 2.65 en  $\text{tg } \phi = 1$ , dan gaat (2) over in:

$$\tau_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.35 \left( \frac{2650 - 1000}{9.81} \right) 9.81 \cdot d \cdot 1$$

dus

$$\tau_c = 192 d \text{ kg/m}^2 \quad (3)$$

Dit is dus de werkelijke kritische sleepkracht, die korrels met een diameter  $d$  in beweging brengt.

Om nu (3) zodanig om te werken, dat men de gemiddelde kritische sleepkracht ( $\bar{\tau}_c$ ) verkrijgt, is het nodig om de grootte van de fluctuaties te kennen. Kalinske (lit. 3e) heeft op de grond van experimenten aangetoond, dat de middelbare fluctuatie  $m$  nabij de bodem ongeveer  $\frac{1}{4}$  van de snelheid ter plaatse is, dus  $\frac{m}{U} = \frac{1}{4}$ , waarbij de middelbare fluctuatie  $m = \frac{\sqrt{\sum (U - \bar{U})^2}}{n}$ .

Ook is aangetoond op grond van experimenten, dat de variatie van  $U$  voldoet aan de normale foutenwet (zie ook §4, lit.5) dus

$$f(U) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2m^2} (U - \bar{U})^2} \quad (4)$$



De waarschijnlijkheid, dat een afwijking  $(U - \bar{U})$  gelegen is tussen de grenzen  $+(U - \bar{U})$  en  $-(U - \bar{U})$  wordt uitgedrukt door de vorm

$$W_{(U - \bar{U})} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-(U - \bar{U})}^{+(U - \bar{U})} e^{-\frac{1}{2m^2}(U - \bar{U})^2} d(U - \bar{U}) \quad (5).$$

Stelt men hierin  $\frac{(U - \bar{U})^2}{2m^2} = t^2$ , dan volgt

$$t = \frac{(U - \bar{U})}{m\sqrt{2}} \quad (U - \bar{U}) = t m\sqrt{2} \quad d(U - \bar{U}) = m\sqrt{2} dt$$

Substitutie in (5) geeft de waarschijnlijkheidsintegraal, die in tabelvorm gepubliceerd is

$$\Theta t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \quad (6).$$

Wil men nu de waarschijnlijkheid berekenen, dat de absolute waarde van een afwijking  $(U - \bar{U})$  gelegen is tussen 0 en  $m$ , 0 en  $2m$ , 0 en  $3m$  enz. en stelt men deze waarschijnlijkheid resp.  $W_m$ ,  $W_{2m}$ ,  $W_{3m}$  enz., dan moet men de thêtafunctie berekenen voor de bijbehorende waarden van  $t$ . Men krijgt dan:

Uit $(U - \bar{U}) = m$	volgt $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$	dus $W_m = 0,68269\dots\dots$
" $(U - \bar{U}) = 2m$	" $t = \frac{2}{\sqrt{2}}$	" $W_{2m} = 0,95450\dots\dots$
" $(U - \bar{U}) = 3m$	" $t = \frac{3}{\sqrt{2}}$	" $W_{3m} = 0,99730\dots\dots$
" $(U - \bar{U}) = 4m$	" $t = \frac{4}{\sqrt{2}}$	" $W_{4m} = 0,99993\dots\dots$
" $(U - \bar{U}) = 5m$	" $t = \frac{5}{\sqrt{2}}$	" $W_{5m} = 0,99999\dots\dots$

De waarschijnlijkheid, dat een afwijking die groter is dan 3 à 4 maal de middelbare waarde, voor zal komen, is dus theoretisch wel zeer klein. Practisch kan men zeggen dat de grootste waarde van een afwijking dus 3 à 4  $m$  is.

Op grond hiervan wordt nu aangenomen, dat de maximum waarde van  $(U - \bar{U}) = 3$  à  $4 m$ , dus omdat  $\frac{m}{\bar{U}} \neq \frac{1}{4}$  volgt dat  $U_{\max} = 1.75$  à  $2 \bar{U}$ .

De sleepkracht varieert met het kwadraat van de snelheid, dus de sleepkracht kan een maximum van  $(1.75^2 \text{ à } 2^2)$  maal de gemiddelde sleepkracht bereiken, d.i. ongeveer 3 à 4 maal.

Gaat men dus uit van de gemiddelde sleepkracht, dan gaat (3) over in

$$\bar{U}_c = \frac{192}{3 \text{ à } 4} d = 64 \text{ à } 48 d \text{ kg/m}^2 \quad (7).$$

Volgens lit. 1 vinden O'Brien en Rindlaub  $\bar{U}_c = 56 d$  en Mavis  $\bar{U}_c = 45.8 d$ . Ook andere opgegeven waarden liggen binnen het in (7) berekende bereik. Waarmee voldoende de juistheid van de door Kalinske gevolgde gedachtengang is aangetoond.

#### §4. De mate van beweging.

Een bepaalde zandkorrel zal op een gegeven ogenblik een snelheid hebben

$$U_z = b(U - U_c) \quad (8).$$

De factor b is, zoals Kalinske na analyse van een aantal metingen vaststelde voor alle praktische doeleinden op 1 te stellen.

Omdat U fluctueert, zal ook  $U_z$  fluctueren en om nu de gemiddelde bewegingssnelheid te vinden moet  $\bar{U}_z$  bepaald worden.

Stelt men weer het aantal korrels (nog steeds zand van uniforme korrelgrootte) dat de sleepkracht per eenheid van oppervlakte opneemt gelijk aan  $\frac{4p}{\pi d^2}$  dan zal het gemiddelde rollend transport G uitgedrukt in drooggewicht per eenheid van breedte en tijd bedragen.

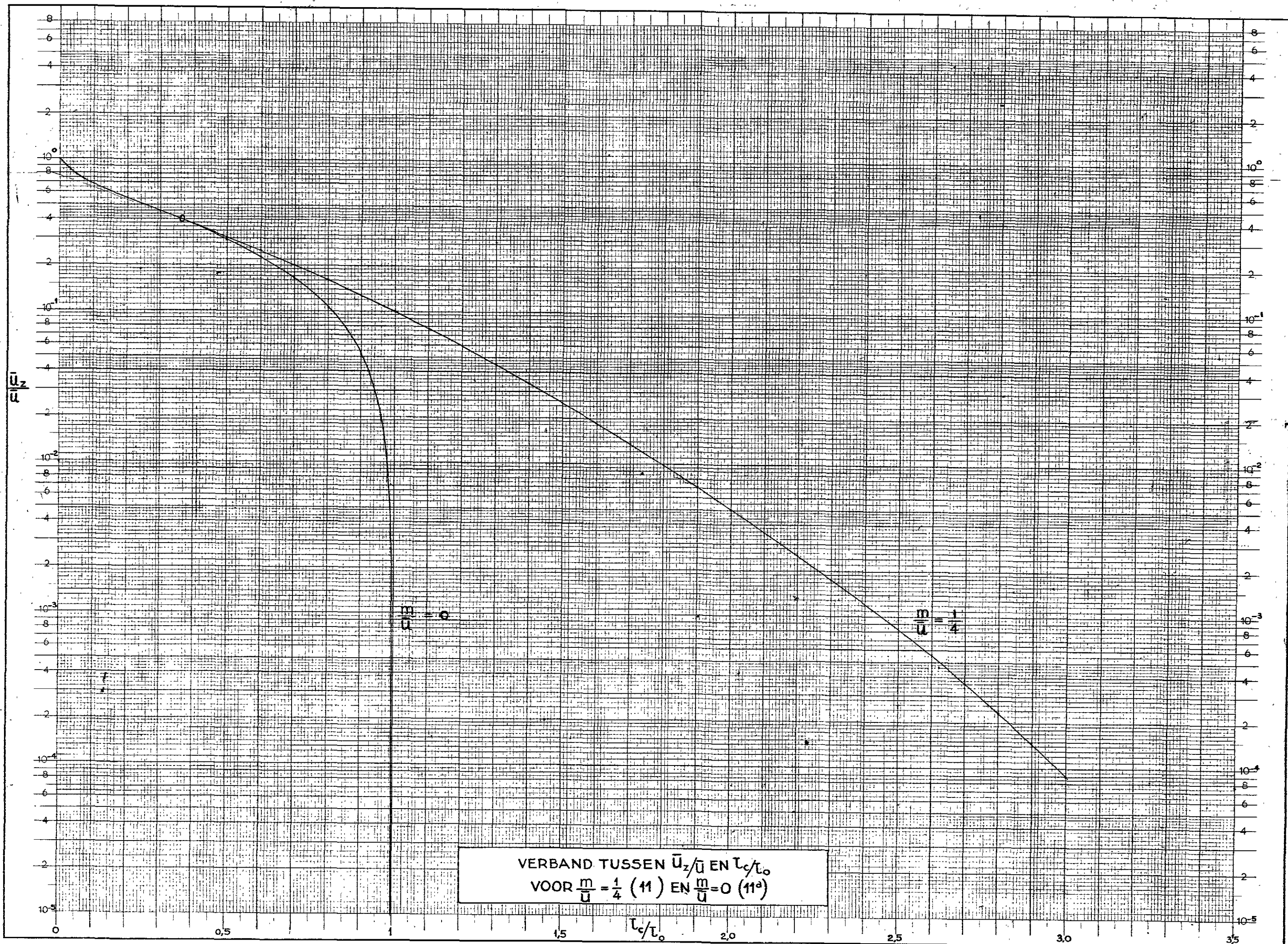
$$G = \frac{\pi}{6} \rho_z g d^3 \bar{U}_z \cdot \frac{4p}{\pi d^2} = \frac{2}{3} \rho_z g p d \bar{U}_z$$

$$G = \frac{2}{3} \rho_z g d p \bar{U}_z \quad (9).$$

Om een uitdrukking voor  $\bar{U}_z$  te vinden moet de variatie van U uitgedrukt worden en hierna de gemiddelde waarde van  $U - U_c$  voor alle waarden van  $U > U_c$ .

Er volgt dus

$$\bar{U}_z = \int_{U_c}^{\infty} (U - U_c) f(U) dU \quad (10).$$



VERBAND TUSSEN  $\bar{u}_z/\bar{u}$  EN  $\tau_c/\tau_0$   
 VOOR  $\frac{m}{U} = \frac{1}{4}$  (11) EN  $\frac{m}{U} = 0$  (11<sup>a</sup>)

In vergelijking (4) is een vorm voor  $f(U)$  gegeven. Stelt men nu  $\frac{U - \bar{U}}{m} = t$  en  $\frac{U_c - \bar{U}}{m} = t_c$ , dan volgt, omdat  $dU = m dt$

$$\begin{aligned} \bar{U}_z &= \int_{t_c}^{\infty} (t - t_c) \frac{m}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{t_c}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt - \left[ \int_0^{\infty} t_c e^{-t^2/2} dt - \int_0^{t_c} t_c e^{-t^2/2} dt \right] \right\} \quad (10a). \end{aligned}$$

Door in de eerste integraal de substitutie  $t^2/2 = z$  en in de tweede integraal  $\frac{t}{\sqrt{2}} = z$  te stellen, volgt

$$\frac{\bar{U}_z}{\bar{U}} = \frac{m}{U\sqrt{2\pi}} e^{-t_c^2/2} - \left( \frac{U_c}{\bar{U}} - 1 \right) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_c} e^{-t^2/2} dt \right] \quad (11).$$

De waarde van de laatste integraal kan bepaald worden met behulp van een tafel voor de thêtafunctie, die in de regel de vorm heeft van (6).

Men neemt dan als argument  $\frac{t}{\sqrt{2}}$  en dan gaat de laatste integraal over in  $\frac{1}{2}(\Theta t)$ .

De sleepkracht varieert met het kwadraat van de snelheid, dus is

$$\frac{U_c}{\bar{U}} = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau_0}}$$

Voor  $\frac{m}{\bar{U}} = 0$ , dat is dus voor laminaire stroming (geen fluctuaties) gaat (11) over in

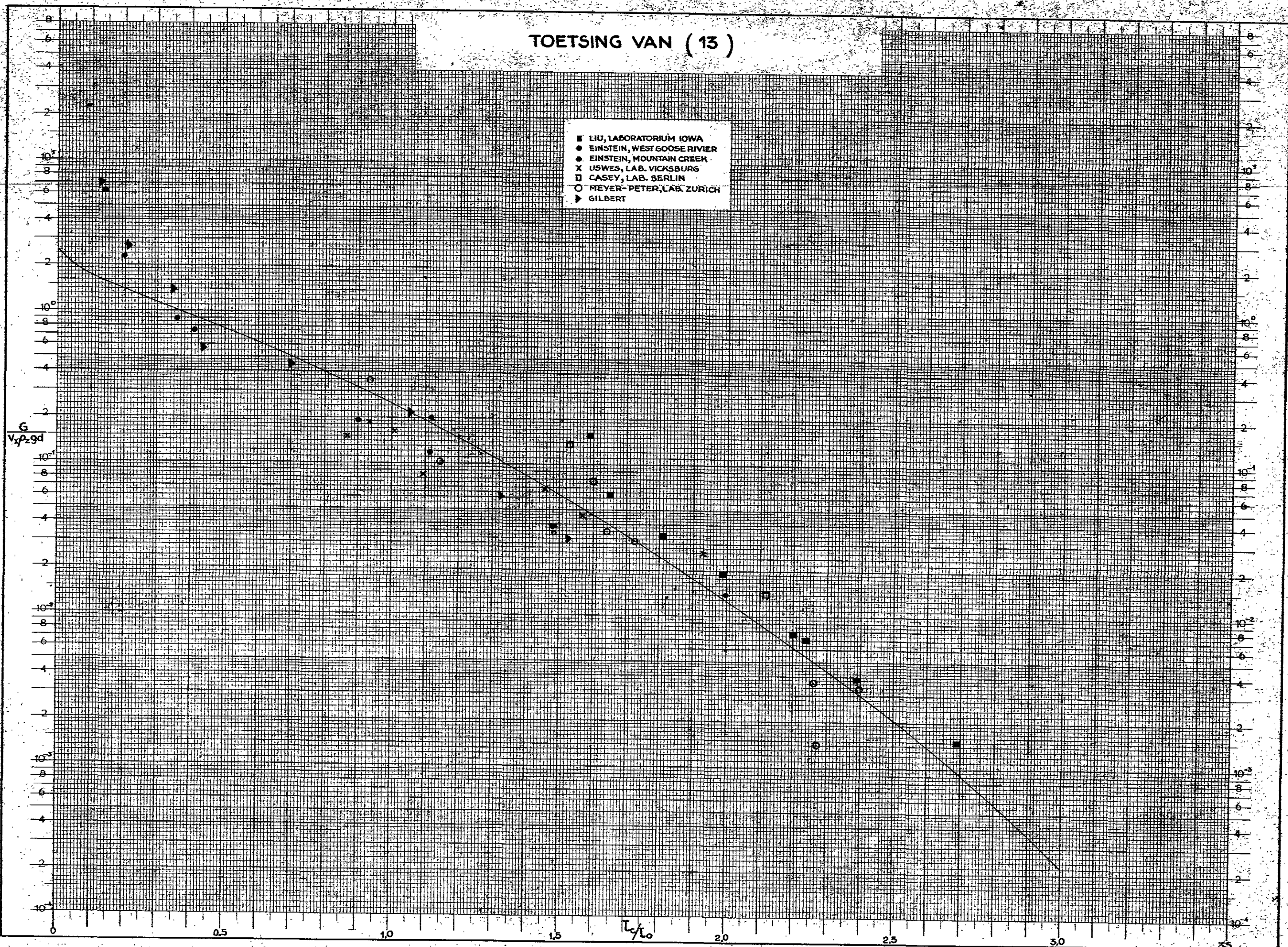
$$\frac{\bar{U}_z}{\bar{U}} = 1 - \frac{U_c}{\bar{U}} \quad \text{sin teken} \quad (11a).$$

welke vorm indentiek is aan (8), wanneer  $b = 1$ .

In fig. 2 zijn 11 en 11a uitgezet voor turbulente ( $\frac{m}{\bar{U}} = \frac{1}{4}$ ) en laminaire ( $\frac{m}{\bar{U}} = 0$ ) stromen als functie van  $\tau_c/\tau_0$ . Uit deze figuur blijkt, dat  $\frac{\bar{U}_z}{\bar{U}}$  voor  $\tau_c/\tau_0 \pm 0.5$  voor turbulente en laminaire stromen hetzelfde is.



# TOETSING VAN (13)



Vergelijking 9 kan nu in de volgende dimensieloze vorm geschreven worden

$$\frac{G}{\bar{U} \rho_z g d} = \frac{2}{3} p \frac{\bar{U}_z}{\bar{U}} \quad (12).$$

$\bar{U}$  is de gemiddelde snelheid aan de bodemoppervlakte, waarvan de grenslaagtheorie aangeeft, dat  $\bar{U} = c \sqrt{\tau_0 / \rho}$  (lit.4). Kalinske geeft voor  $c = \pm 11$ . Stelt men weer  $p = 0.35$  dan gaat (12) over in

$$\frac{G}{v_x d \rho_z g} = 2.5 \frac{\bar{U}_z}{\bar{U}} \quad (13).$$

waarin  $v_x = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ .

Kalinske heeft een groot aantal metingen geanalyseerd, zowel uit proefgoten als uit rivieren afkomstig en hierop (13) getoetst (zie fig. 3).

Enkele punten zijn verkregen door middelen van een groep van punten, teneinde de figuur overzichtelijk te houden. Een afwijking treedt op voor  $\tau_c / \tau_0 < 0.3$  à  $0.4$ . Dit moet naar alle waarschijnlijkheid worden toegeschreven aan het feit, dat bij grote snelheden (dus kleine  $\tau_c / \tau_0$ ) het zwevend transport nagenoeg niet meer van het rollend transport bij het meten te scheiden zijn en zal er dus nog zwevend transport in de metingen begrepen zijn.

In herinnering wordt gebracht, dat (12) alleen geldt voor zand met uniforme korrelgrootte en voor praktisch bolvormige korrels. Beide voorwaarden zullen bij de gebruikte metingen niet altijd aanwezig zijn geweest, wat althans in ieder geval een deel van de overigens niet oeverdreven spreiding kan verklaren.

Voor de benedenrivieren is uit vele metingen gebleken, dat de gemiddelde snelheid waarbij er zwevend transport op gaat treden gelegen is tussen 0.40 en 0.60 m/sec. Neemt men verder een korrelgrootte aan van 300  $\mu$ , dan vindt men

$$\tau_c / \tau_0 = \frac{0.192 \cdot 300 \cdot 10^{-6} \cdot 50^2}{0.50^2} = 0.575$$

Verhoogt men nu de snelheid tot bv. 1.00 m/sec, dan kan men een behoorlijk zwevend transport verwachten. De waarde voor  $\tau_c / \tau_0$  wordt dan  $\pm 0.14$ . Uit dit voorbeeld valt de afbuiging van de lijn voor kleine waarden van  $\tau_c / \tau_0$  te verklaren.

Voor grof zand van bv. 1000  $\mu$  en een beginsnelheid voor het zwevend transport van bv. 0.90 m/sec, wordt  $\tau_c / \tau_0 = 0.59$  waaruit zou volgen, dat dit afbuigingspunt niet veel zal variëren.

Toetst men nu de in deze paragraaf afgeleide formules op de Rijn bij Arnhem voor het geval, dat  $H = 6$  m en  $V_m = 1.32$  (lit. 6) dan is in lit. 7 een zwevend zandtransport berekend van  $M_z = 103$  cc/m<sup>1</sup>sec.

Stelt men de maatgevende korrelgrootte van het bodemmateriaal op 1000  $\mu$  (fig. 8, lit. 5), welke korrelgrootte door 60 % onderschreden wordt dan volgt

$$\frac{\tau_c}{\tau_0} = \frac{0.192 d c^2}{v^2} = \frac{0.192 \cdot 1000 \cdot 10^{-6} \cdot 2500}{1.32^2} = 0.275$$

Met behulp van fig. 3 volgt hieruit  $\frac{g}{v_x d \rho_z g} = 1.2$  dus

$$M_r = 1.2 \times \frac{dV}{c} \times \frac{2650}{1700} \sqrt{g} = 158 \text{ cc/m}^1 \text{ sec}$$

steeds uitgaande van bolvormige korrels.

Men komt dus op een totaal transport van  $103 + 158 = 261$  cc/m<sup>1</sup>sec.

Voor 900  $\mu$  (onderschreden door 50 %) bedraagt  $M_r = 147$  cc/m<sup>1</sup>sec, dus  $M_{\text{totaal}} = 103 + 147 = 250$  cc/m<sup>1</sup>sec.

In lit. 5, fig. 8 volgt voor een waterafvoer  $Q = 6 \times 1.32 = 7.9$  m<sup>3</sup>/sec een totaal transport van  $18 \text{ m}^3/\text{etmaal m}^1 = 208$  cc/sec m<sup>1</sup>.

Het hierboven becijferde is dus  $\pm 20$  % groter dan uit metingen volgt. Dit komt goeddeels voor rekening van het feit dat bodemmateriaal niet bolvormig, doch min of meer hoekig is. Ook zou een andere waarde van  $p$  van invloed kunnen zijn.

### §5. Zandmengsels.

Bij zand-mengsels van uiteenlopende korrelgrootte kan men als volgt redeneren. Een zandmengsel met een gemiddelde korrelgrootte bestaat uit de som van een aantal fracties van zand met uniforme korrelgrootte  $d_1, d_2, d_3, \dots$ . Evenzo is het deel  $p$  van het mengsel dat de sleepkracht opneemt de som van de deler  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  der fracties met een korrelgrootte  $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$ , dus

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

-Voor-

Voor elke fractie geldt dan

$$\tau_{on} = \frac{1}{3} \frac{p}{p_n} p_n (\rho_z - \rho_w) g d_n \operatorname{tg} \phi = \frac{1}{3} p (\rho_z - \rho_w) g d_n \operatorname{tg} \phi \quad \text{kg/m}^2.$$

Het deel van de sleepkracht opgenomen door de korrels van elke fractie is  $\tau_{on} = \frac{p_n}{p} \tau_o$

Hieruit volgt, dat de verhouding  $\tau_{on} / \tau_o$  voor een zandmengsel voor een bepaalde  $\tau_o$  varieert met de korrelgrootte der fracties. Het totale rollend transport wordt nu verkregen, door het transport van elke fractie  $G_n$  te bepalen en deze waarden te sommeren. Hiertoe moet  $p_n$  nog bepaald worden. Dit kan geschieden met behulp van de zeefkromme.

Noemt men  $n_1$  de gewichtsverhouding van de fractie met een korrelgrootte  $d_1$ , dan is

$$n_1 (:) \frac{4p_1}{\pi d_1^2} = \frac{1}{6} \pi d_1^3 \rho \quad \text{dus} \quad p_1 (:) \frac{n_1}{d_1} = q_1$$

dus volgt

$$\frac{p_1}{p} = \frac{q_1}{q}$$

waarin  $q = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots)$

Kent men dus de factor  $p$ , die in het algemeen weinig varieert ( $\pm 0,35$ ) dan kunnen met behulp van de zeefkromme de waarden van  $p_n$  bepaald worden, Het transport voor iedere fractie is dan

$$\frac{G_n}{v_x d_n \rho g p_n} = 7.3 f(\tau_{on} / \tau_o) \quad (14).$$

Het totaal transport is dus

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots \quad (14a).$$

Voor ieder zandmengsel zal er een korrelgrootte zijn, die als zand met een uniforme korrelgrootte beschouwd dezelfde uitkomst met formule (13) zal geven als het mengsel met (14) en (14a). Deze korrelgrootte is voor een bepaald mengsel niet constant maar variëren met  $\tau_o$ . Kalinske heeft verschillende mengsels geanalyseerd en komt tot de conclusie dat men voor benaderende berekeningen zonder al te grote fouten voor deze maatgevende korrelgrootte ook wel de gemiddelde korrelgrootte kan gebruiken. Hoe meer de grenzen waartussen de uiterste korrelgrootten van een mengsel uit elkaar liggen, hoe groter de afwijking zal zijn.

's-Gravenhage, 1 April 1951.

De Techn. Opz. A.

w.g. R.H.J. Morra.



Gebruikte afkortingen.

$K_s$	=	stroomkracht op een korrel
$K_{sc}$	=	critische stroomkracht op een korrel
$K_z$	=	zwaartekracht op een korrel
$K_o$	=	opwaartse druk op een korrel
$R_z$	=	Reynoldse getal van een zandkorrel $= \sqrt{\tau_o/\rho} \cdot d/v$
$\rho_w$	=	dichtheid water
$\rho_z$	=	dichtheid zand
$\tau_o$	=	sleepkracht $= \rho g H I$
$\tau_c$	=	critische sleepkracht
$d$	=	diameter zandkorrel
$v$	=	viscositeit van de vloeistof
$p$	=	oppervlaktedeel, dat de sleepkracht opneemt
$U$	=	stroomsnelheid in een punt
$v_x$	=	$\sqrt{\tau_o/\rho}$
$M_r$	=	rollend transport
$M_z$	=	zwevend transport

Literatuurlijst.

1. G.A.T. Heyndrickx, Het transport van bodemmateriaal door stromend water. Tijdschr. Openb. Werken v. België, Februari, April, Juni 1948.
2. Irs. J.B. Schijf en J. Th. Thijsse, Metingen van zandtransport. De Ingenieur 1941, Nr. 28.
3. A.A. Kalinske, Movement of sediment as bed load in rivers. Transactions Am. Geophysical Union Vol. 28 Nr. 4 page 615 e.v., Aug. 1947.
- 3a t/m 3i verwijst naar literatuurlijst van 3.
4. Hunter Rouse, Engineering Hydraulics, New York 1950. 1039 pag.
5. Ir. E.M.H. Schaank en Slotboom, Enkele mededelingen betreffende de zandbeweging op de Neder-Rijn. De Ingenieur 1937, Nr. 51.
6. Ir. L. v. Bendegom, Enige beschouwingen over riviermorphologie en -verbetering. De Ingenieur 1947, Nr. 4.
7. R.H.J. Morra, De zandgehalteverticaal bij stationnaire stroming onder evenwichtsvoorwaarden 1948 en de Ingenieur 1950, Nr. 51.